Electricidad y calor

Webpage: http://paginas.fisica.uson.mx/qb

Universidad de Sonora

Temas

7. Campo eléctrico y Ley de Gauss.

i. Concepto de campo eléctrico.
ii. Calculo de la intensidad de campo eléctrico.
iii. Líneas de campo eléctrico.
iv. Dipolos eléctricos.
v. Carga y flujo eléctrico.
vi. Ley de Gauss.
vii. Aplicaciones de la ley de Gauss.

Concepto de campo eléctrico.

El concepto de **Campo** es de gran importancia en ciencias y, particularmente en la Física.

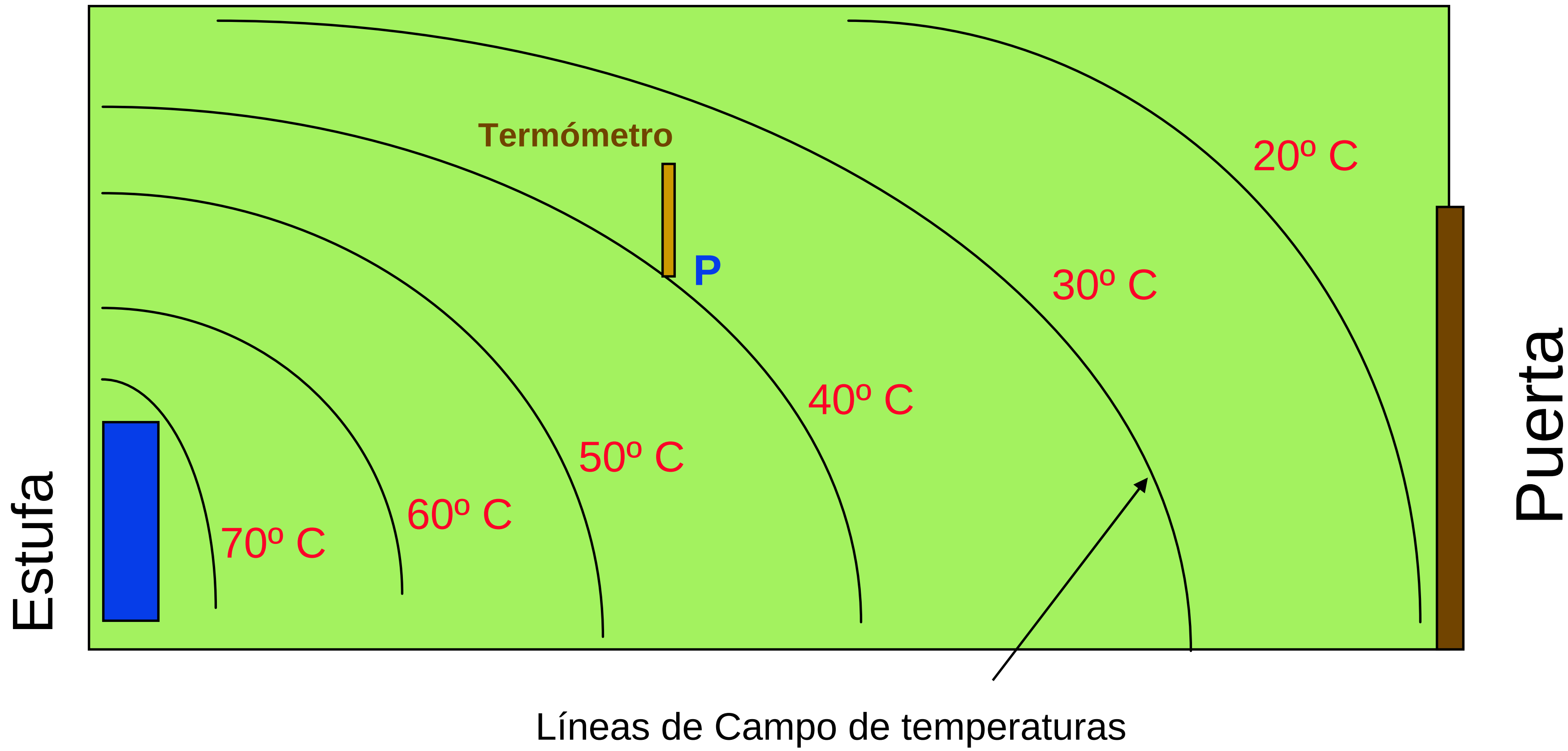
La idea consiste en atribuirle propiedades al espacio, en vez de considerar a los verdaderos causantes de los fenómenos que ocurren en dicho espacio.

Para comprender esto veamos algunos ejemplos:

- Un campo de temperaturas (Escalar)
- Un campo de velocidades (Vectorial)
- Campo gravitacional (Vectorial)
  - Homogéneo
  - No homogéneo

Concepto de campo eléctrico.

Campo de temperaturas (Escalar)



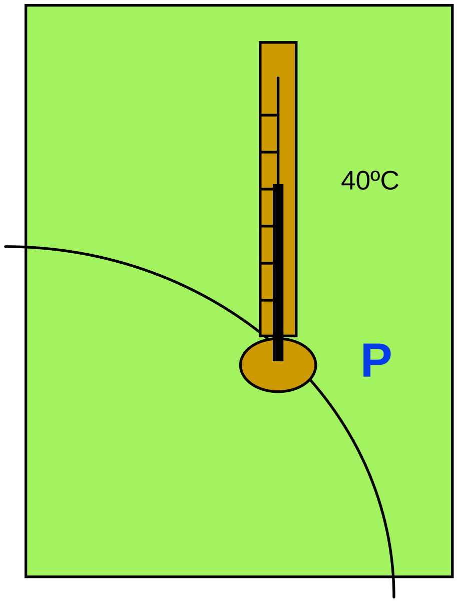
Concepto de campo eléctrico.

La intensidad del Campo de Temperaturas en el punto P corresponde a lo que mide el termómetro que está en él.

Es una magnitud escalar puesto que no posee una dirección asociada .

La causa verdadera de que la temperatura de las isotermas sea 40°C se debe a una gran variedad de factores como la estufa, la puerta, la temperatura exterior, las dimensiones de la sala, etc.

Evidentemente no depende del instrumento con que se mide la Intensidad del Campo de Temperaturas; es decir, no depende del Termómetro.



Concepto de campo eléctrico.

Campo de velocidades (vectorial)

Río o corriente de agua

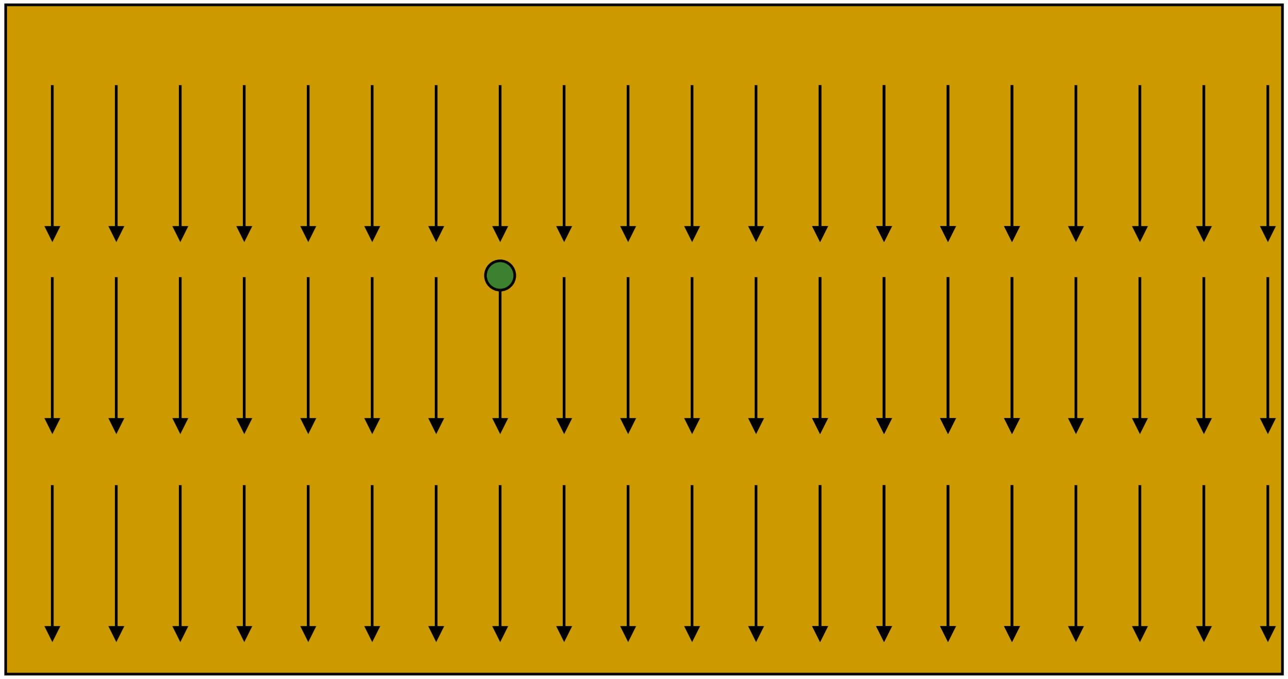
Concepto de campo eléctrico.

Campo gravitacional homogéneo (en realidad es un campo de aceleraciones gravitacionales)

Todos los puntos del salón de clases tienen la propiedad de que masas colocadas en ellos experimentan la misma aceleración; es decir, g = cte.

Salón de clases

Este Campo gravitacional depende del planeta en que se encuentre el salón de clases, ya que el valor de g no es el mismo.

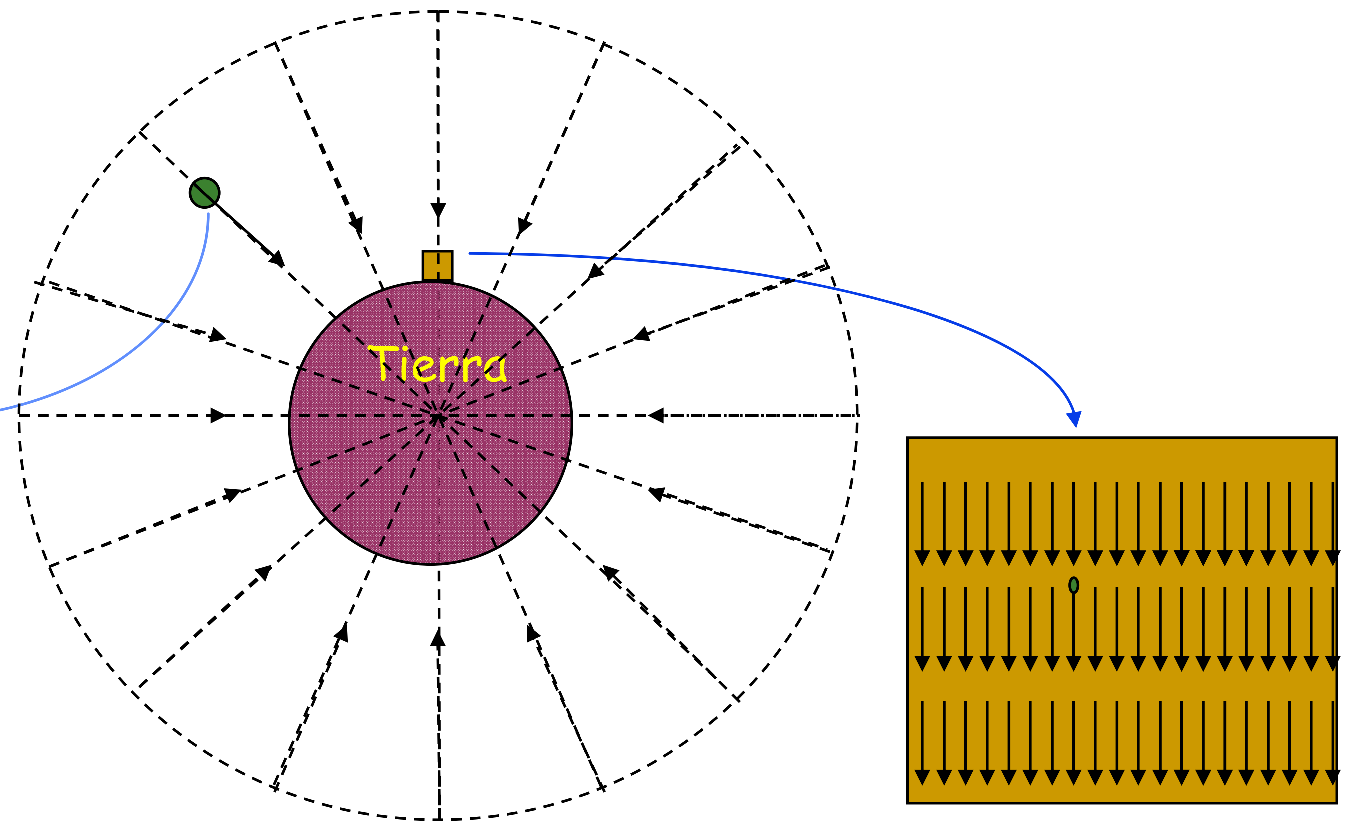


Concepto de campo eléctrico.

Campo gravitacional no homogéneo

Si consideramos el planeta Tierra en su totalidad; entonces el Campo gravitacional presenta otro aspecto.

$$g = \frac{GM}{r^2}$$



La intensidad del campo g, ahora depende de M y r.

Concepto de campo eléctrico.

Con las ideas anteriores, a continuación vamos a explorar el concepto de campo eléctrico.

- Sea un punto P del espacio.
- Para dicho punto se define la intensidad del Campo Eléctrico, que designaremos por $\boldsymbol{E}$, del modo siguiente:
  - Coloquemos en dicho punto una carga de prueba positiva q_0 que haremos cada vez mas pequeña en magnitud.
  - Si $\boldsymbol{F}_e$ es la fuerza eléctrica que actúa sobre ella, producida por las otras cargas eléctricas que existen en el espacio y de las que desconocemos sus características, el campo eléctrico se define como:

$$\boxed{\vec{E} \equiv \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}_e}{q_0}}$$

Concepto de campo eléctrico.

- Como se puede ver, el Campo Eléctrico es un campo vectorial ya que se define como el cociente de un vector (la fuerza eléctrica) entre un escalar (la carga de prueba).
- Posee, en cada punto, la dirección y sentido en que actúa la fuerza eléctrica, $\boldsymbol{F_e}$.
- Su unidad en el Sistema Internacional de unidades (SI) es el N/C (Newton/Coulomb).
- Del mismo modo que el campo de temperaturas no depende del termómetro, el campo eléctrico no depende ni del valor de la fuerza que se mida ($\boldsymbol{F_e}$) ni del valor de la carga de prueba que se use ($\boldsymbol{q_0}$).

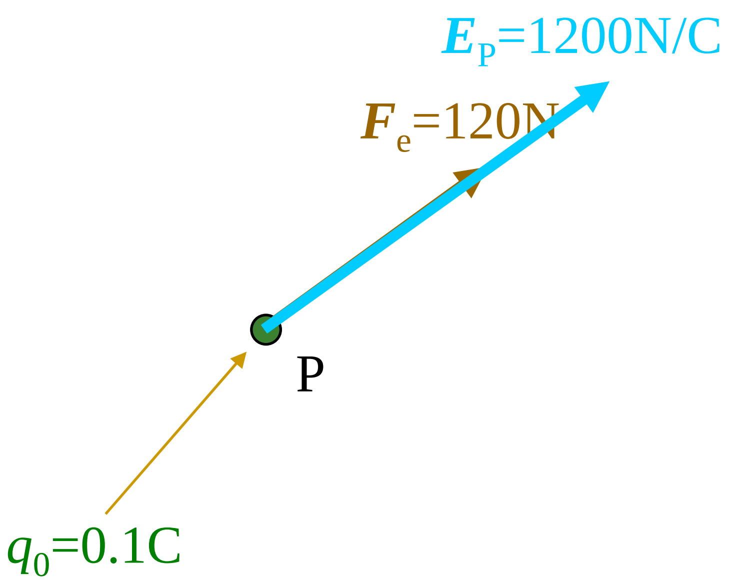
$$\boxed{\vec{E} \equiv \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}_e}{q_0}}$$

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

Sea un punto P del espacio. ¿Cuál será la intensidad de Campo Eléctrico en dicho punto?

Para responder esta pregunta, procedamos de la siguiente forma:

- Coloquemos en P una carga q_0=0.1C;
- Supongamos que sobre ella actúa una fuerza eléctrica igual a $\boldsymbol{F}_e$=120N en la dirección mostrada.
- En este caso tenemos que $\boldsymbol{E}_P$=120N/0.1C=1200N/C, en la misma dirección y sentido de $\boldsymbol{F}_e$ tal como se muestra.

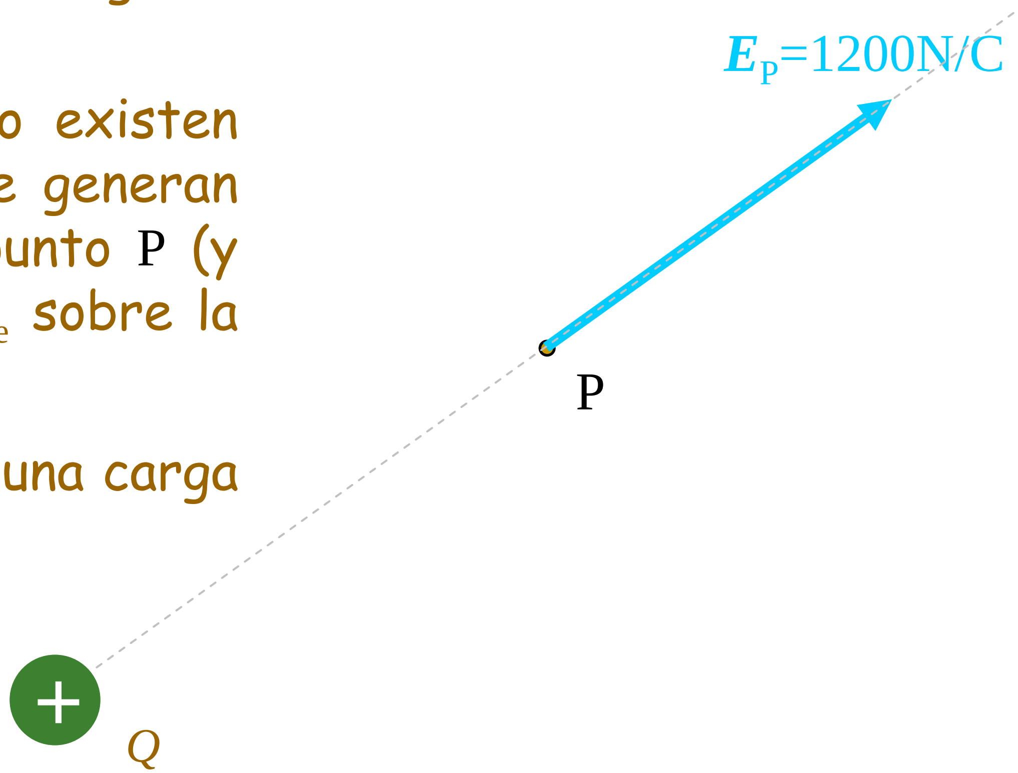


Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

Con esto, hemos calculado la intensidad del Campo Eléctrico en el punto P, a saber $\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}$; pero ¿qué significa?

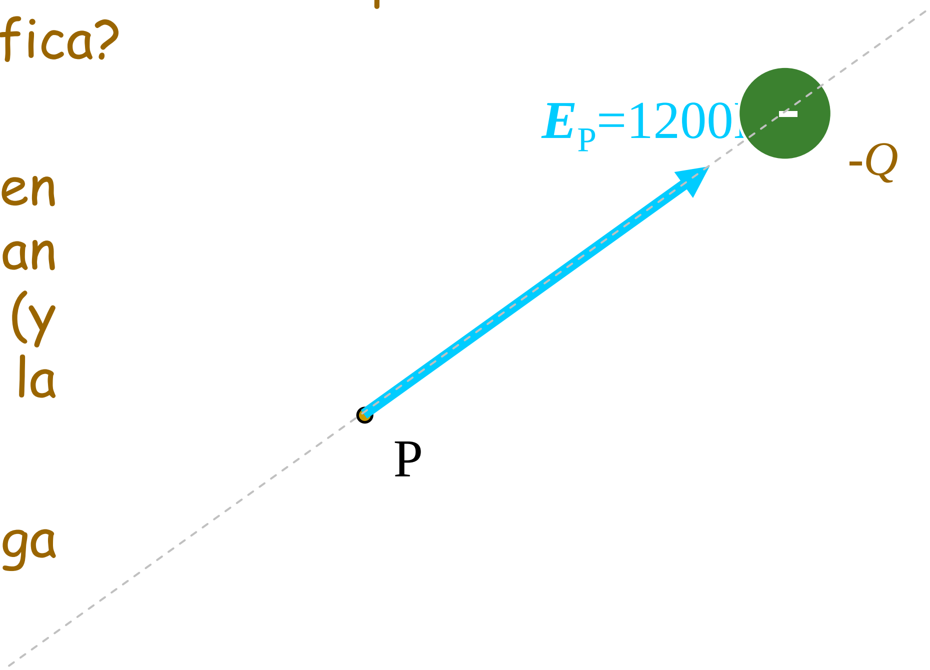
Significa que en el espacio existen otras cargas eléctricas que generan un Campo Eléctrico en el punto P (y que ejercieron la fuerza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$ sobre la carga de prueba).

Puede existir, por ejemplo, una carga positiva.



Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

Con esto, hemos calculado la intensidad del Campo Eléctrico en el punto P, a saber $\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}$; pero ¿qué significa?



Significa que en el espacio existen otras cargas eléctricas que generan un Campo Eléctrico en el punto P (y que ejercieron la fuerza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$ sobre la carga de prueba).

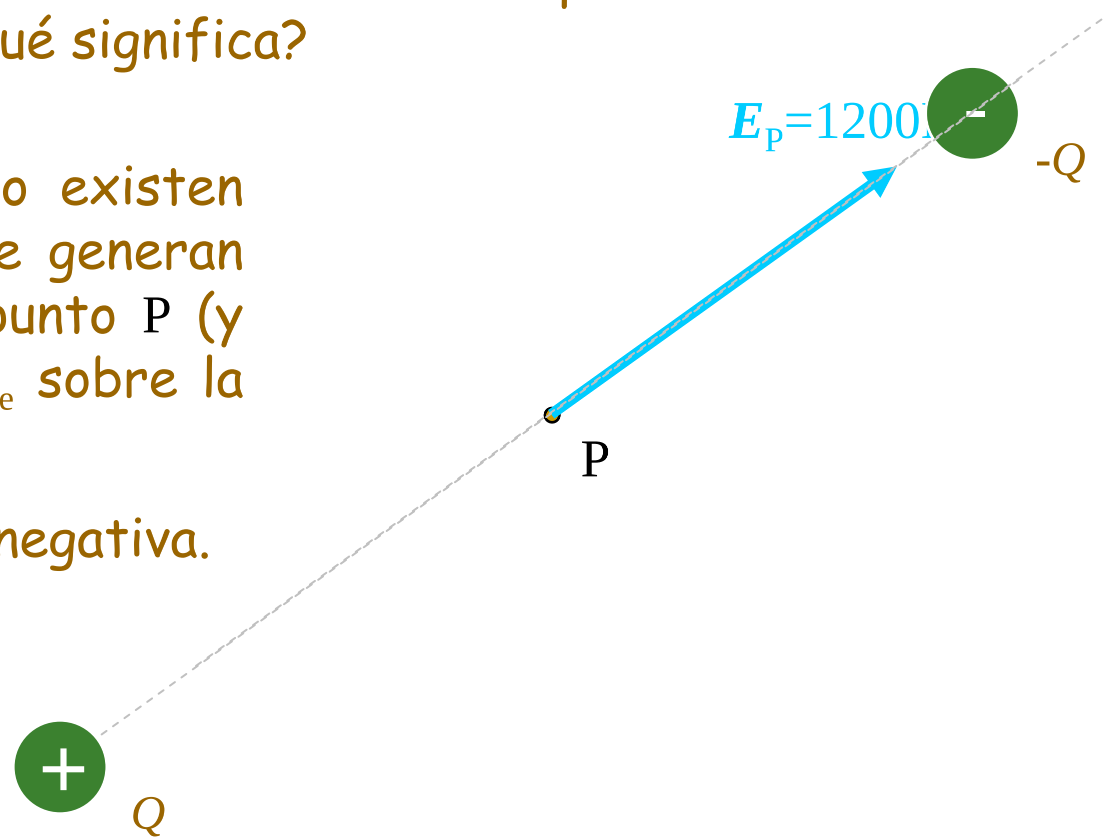
O existir, por ejemplo, una carga negativa.

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

Con esto, hemos calculado la intensidad del Campo Eléctrico en el punto P, a saber $\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}$; pero ¿qué significa?

Significa que en el espacio existen otras cargas eléctricas que generan un Campo Eléctrico en el punto P (y que ejercieron la fuerza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$ sobre la carga de prueba).

O, una carga positiva y una negativa.

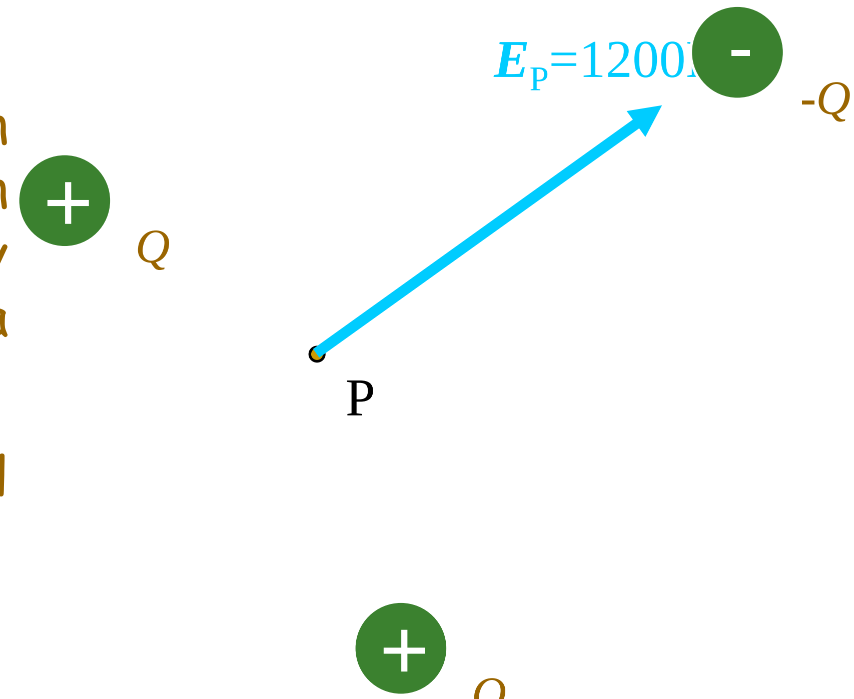


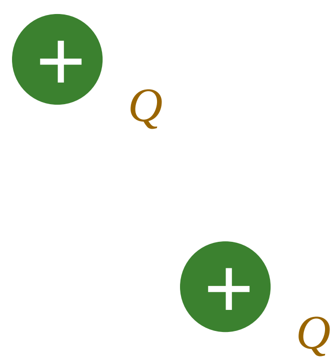
Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

Con esto, hemos calculado la intensidad del Campo Eléctrico en el punto P, a saber $\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}$; pero ¿qué significa?

Significa que en el espacio existen otras cargas eléctricas que generan un Campo Eléctrico en el punto P (y que ejercieron la fuerza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$ sobre la carga de prueba).

O, varias cargas que producen el mismo efecto.

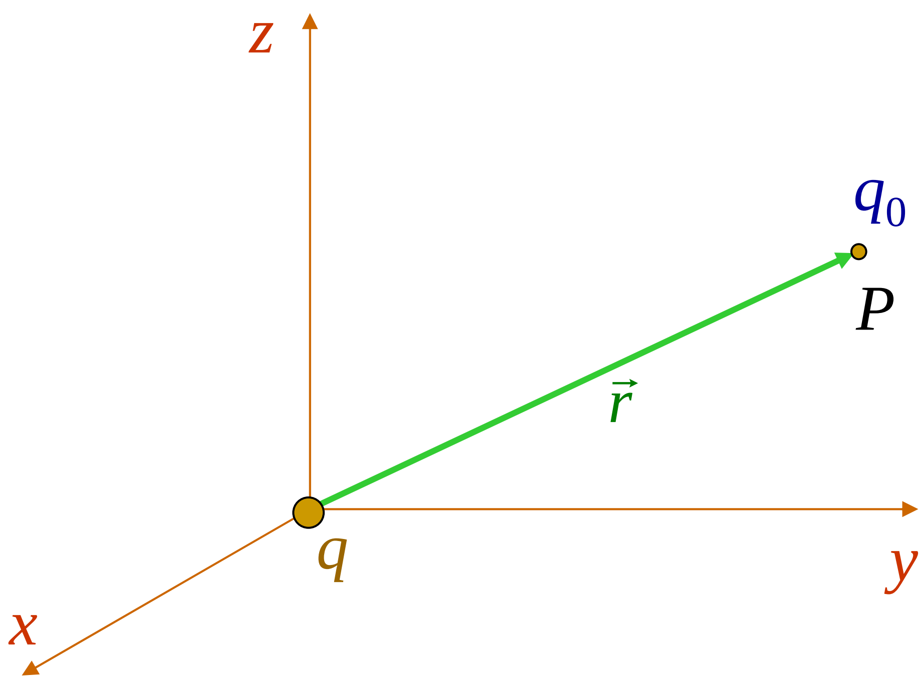




Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

Expresión vectorial a partir de la Ley de Coulomb

Considerando una carga puntual q colocada en el origen de un sistema de coordenadas, podemos calcular la fuerza que ejerce sobre una carga de prueba q_0 colocada en el punto P, tal como se muestra



Con base en el esquema, encontramos que

$$\vec{F} = k_e \frac{qq_0}{r^2}\hat{r}$$

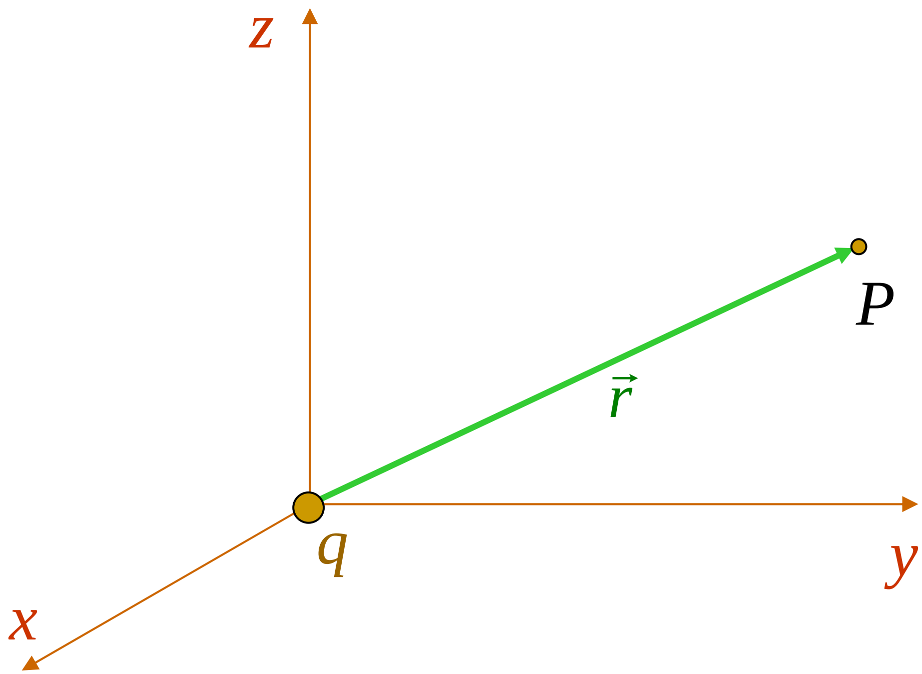
k_e: Constante de Coulomb

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

Expresión vectorial a partir de la Ley de Coulomb

Conocida la expresión para la fuerza eléctrica, usamos la definición de campo eléctrico, a saber

$$\vec{E} \equiv \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}_e}{q_0}$$

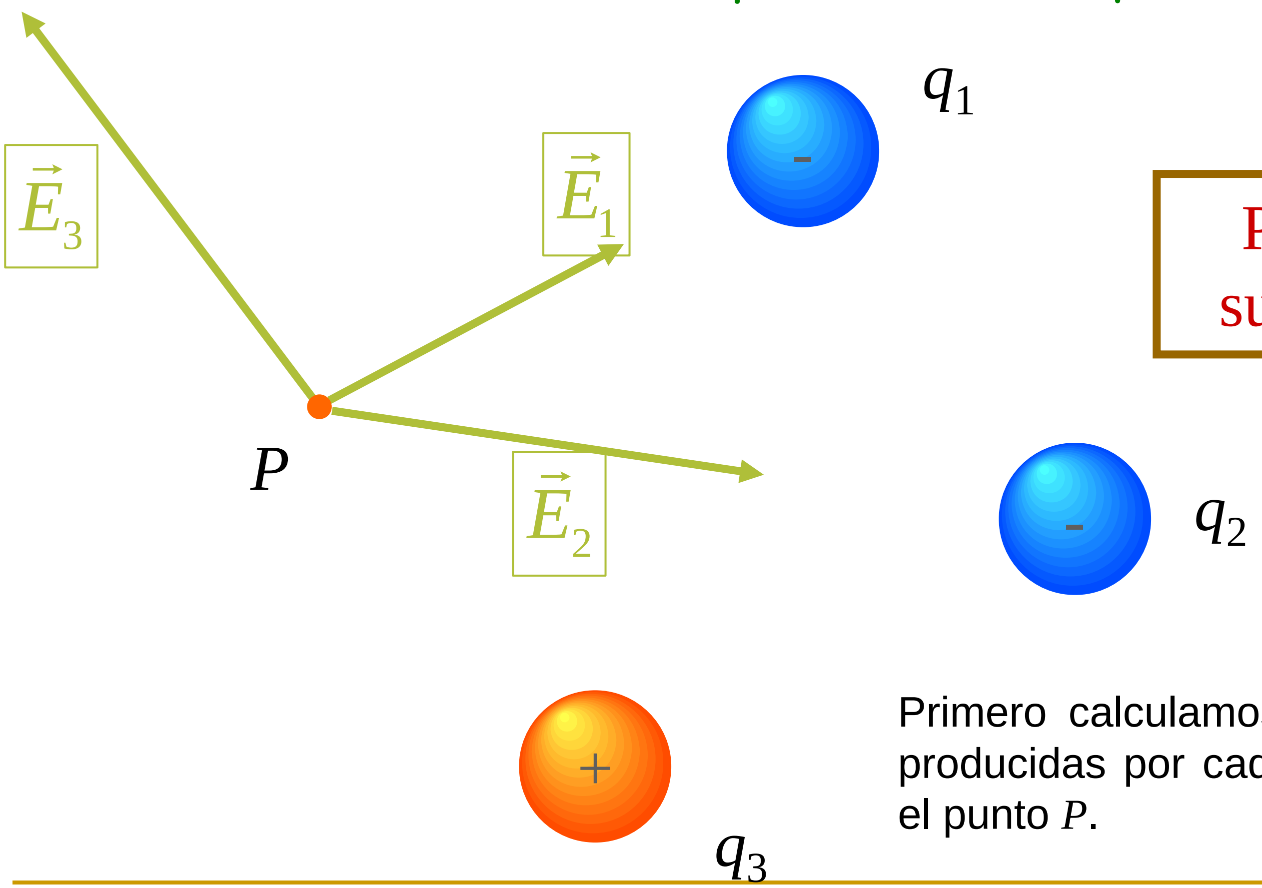


de donde podemos escribir la expresión vectorial para el campo eléctrico en el punto P, a una distancia r de la carga puntual q, como

$$\boxed{\vec{E}_P = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}}$$

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

Consideremos un arreglo de varias cargas: ¿cómo calculamos el campo eléctrico producida por todas ella en un punto P? A continuación se muestra el procedimiento que debemos seguir.

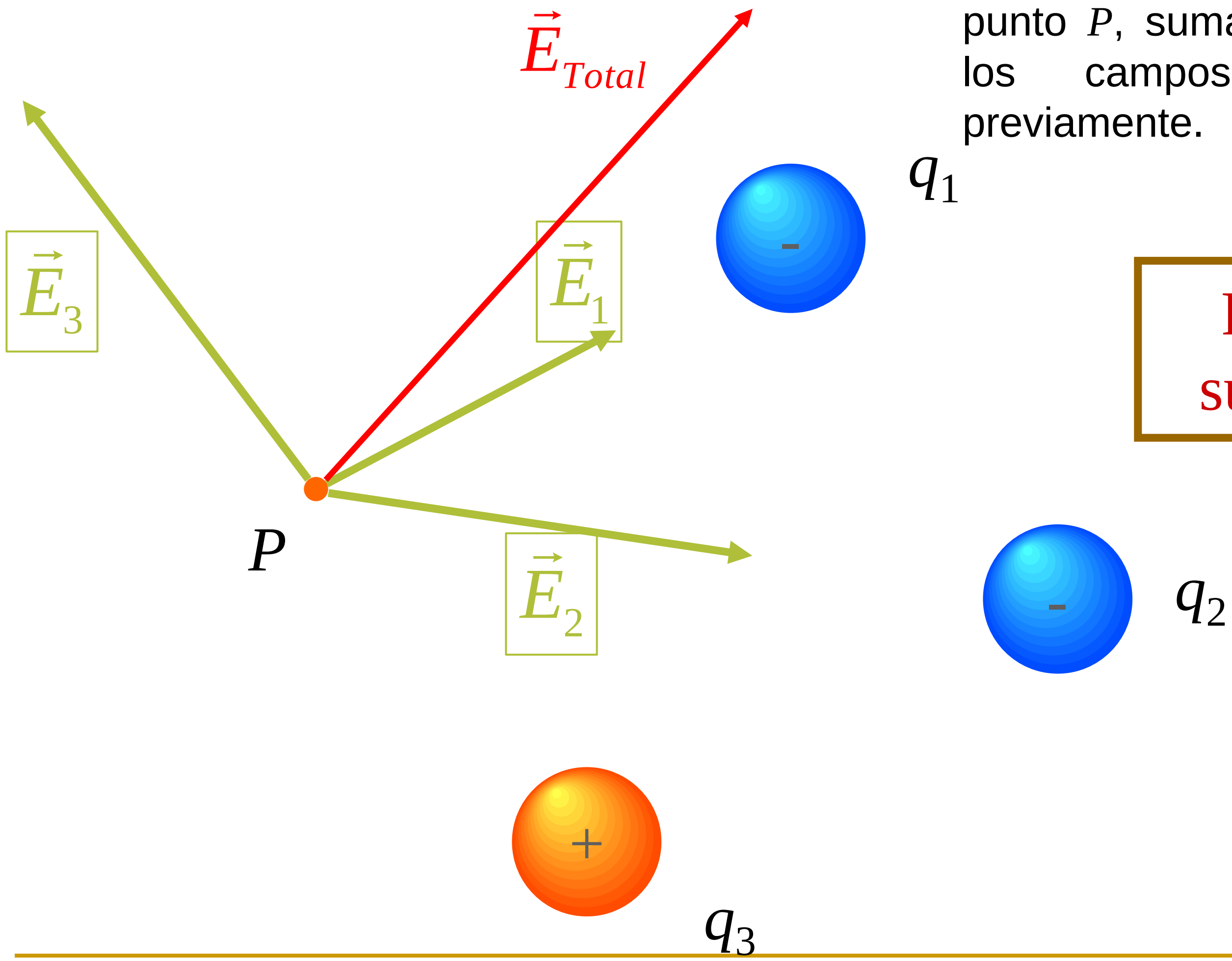


Principio de superposición

Primero calculamos los campos eléctricos producidas por cada una de las cargas en el punto P.

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

A continuación, y con la finalidad de encontrar el campo eléctrico total en el punto P, sumamos vectorialmente todos los campos eléctricos calculados previamente.



Principio de superposición

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico.

El procedimiento recién desarrollado se conoce como **Principio de superposición del campo eléctrico** y establece que "el campo eléctrico en el punto P, producido por un arreglo de cargas se obtiene a partir de la suma vectorial de los campos producidos por cada una de las cargas del sistema, de manera independiente".

Matemáticamente, se puede escribir como

$$\vec{E}_{Total} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i k \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

Cargas discretas

$$\vec{E}_{Total} = \int d\vec{E} = \int k \frac{q}{r^3} \vec{r}\, dq$$

Distribución continua de carga

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico. Ejercicios.

Dos cargas puntuales de 2.00μC se localizan sobre el eje x, una en x=1.00m y la otra en x=-1.00m.

a) Determine el campo eléctrico en un punto P ubicado sobre el eje y, en y=0.500m.

$$\boxed{\mathbf{E} = 1.29 \times 10^{4}\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}}$$

b) Calcule la fuerza eléctrica sobre una carga de -3.00μC ubicada en el punto P.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \Longrightarrow \boxed{-3.86 \times 10^{-2}\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{N}}$$

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico. Ejercicios.

Considere el dipolo eléctrico mostrado en la figura P23.22.

a) Calcule el campo eléctrico que produce en un punto P ubicado sobre el eje +x.

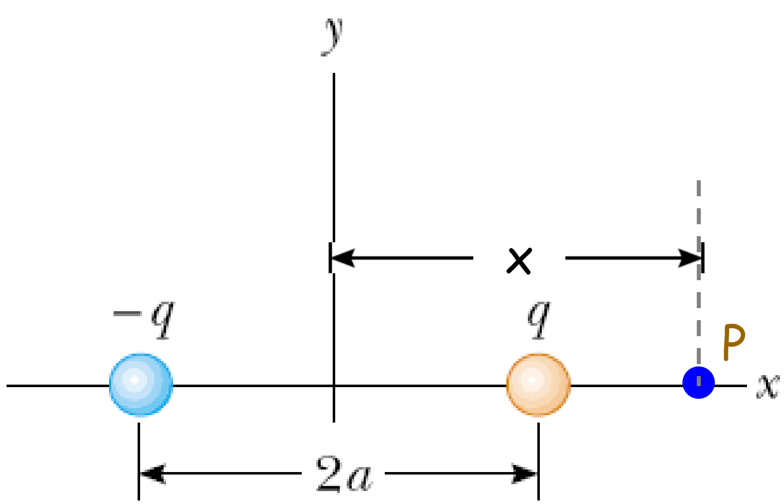


Figure P23.22

El campo eléctrico en cualquier punto ubicado a una distancia x a la derecha del dipolo está dado por

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k_e q(\hat{i})}{(x-a)^2} + \frac{k_e q(-\hat{i})}{(x+a)^2} = \frac{k_e q(4ax)}{(x^2-a^2)^2}(\hat{i})}$$

Cálculo de la intensidad de campo eléctrico. Ejercicios.

Considere el dipolo eléctrico mostrado en la figura P23.22.

b) ¿Cuánto vale el campo eléctrico producido por el dipolo en un punto P ubicado sobre el eje +y a una distancia y?

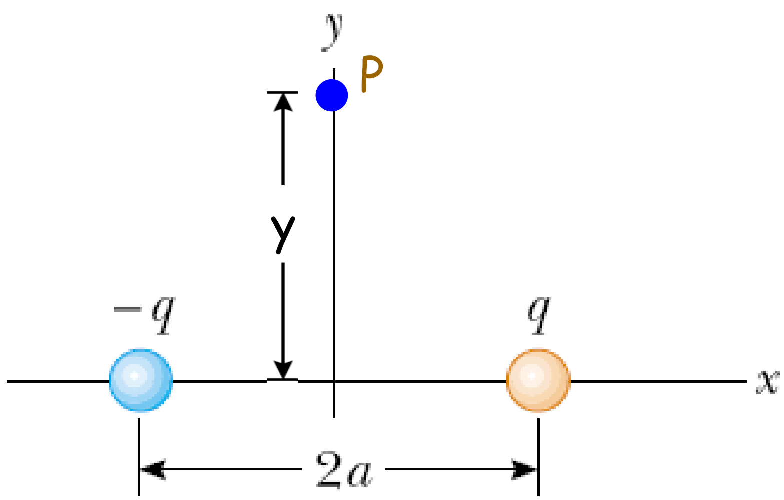
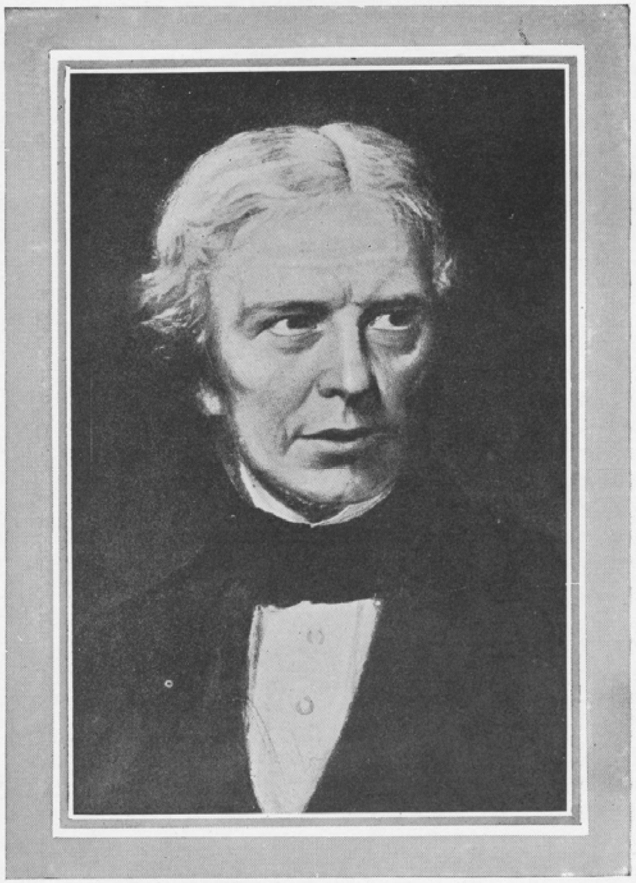


Figure P23.22

El campo eléctrico en cualquier punto ubicado a una distancia y perpendicular al eje del dipolo está dado por

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k_e q(-a\hat{i} + y\hat{j})}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}} - \frac{k_e q(-a\hat{i} - y\hat{j})}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{k_e q\left(2a\right)}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}(-\hat{i})}$$

Líneas de campo eléctrico.


Michael Faraday

Visualizar la distribución de un campo eléctrico en una región del espacio mediante "líneas de campo" fue una idea introducida por el físico inglés Michael Faraday (1791-1867).

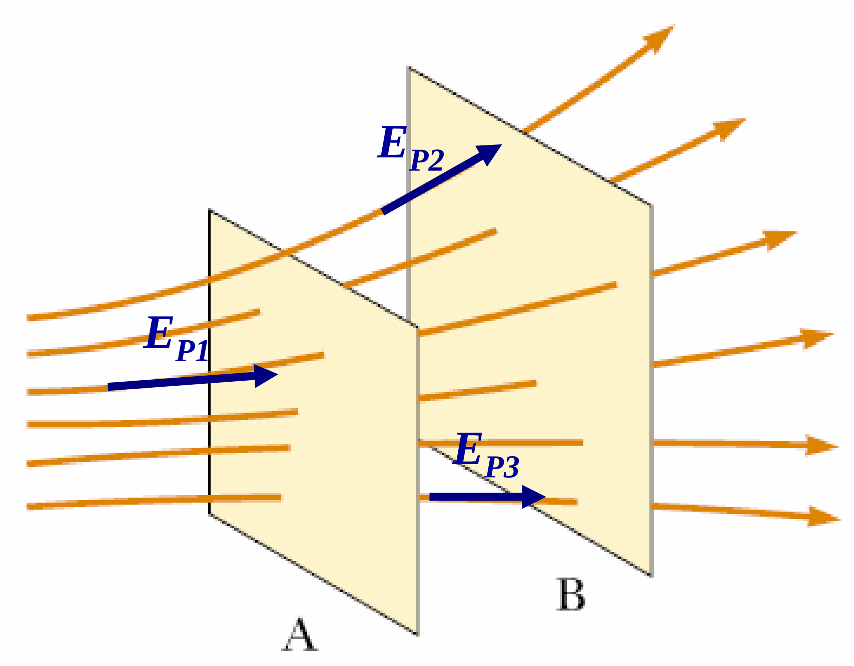
La idea consiste en trazar líneas de tal forma que

- la tangente a una línea de campo en cualquier punto es la dirección del campo eléctrico en ese punto.
- el número de líneas por unidad de área transversal (perpendicular a las líneas) es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en esa región.

Líneas de campo eléctrico.

Las líneas de campo son una manera de poder visualizar la distribución de un campo eléctrico en una región del espacio; por ejemplo, a partir de la idea mencionada anteriormente y con base en la figura anexa, podemos establecer:

- en cualquier punto P, la tangente a una línea de campo corresponde a la dirección del campo eléctrico en ese punto.
- como la densidad de líneas en la región A (número de líneas que atraviesan el área sombreada) es mayor que en la región B, entonces en la región A, la magnitud del campo es mayor que en la región B.

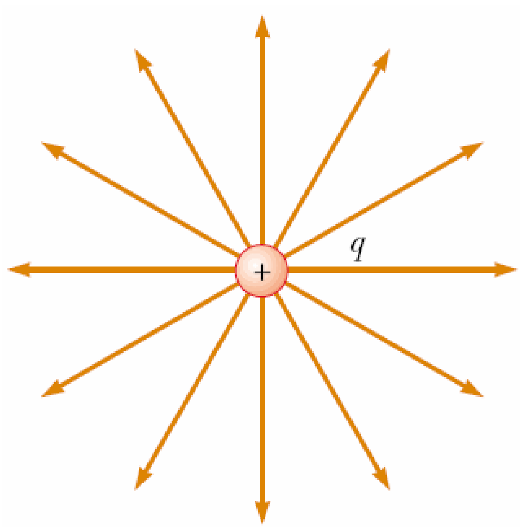


Líneas de campo eléctrico.

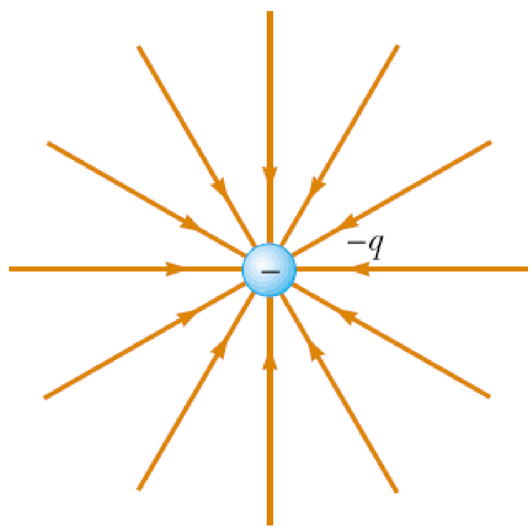
En el caso de una carga puntual podemos trazar las líneas de campo, considerando que el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E}_P = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

para obtener



Para una carga positiva



Para una carga negativa

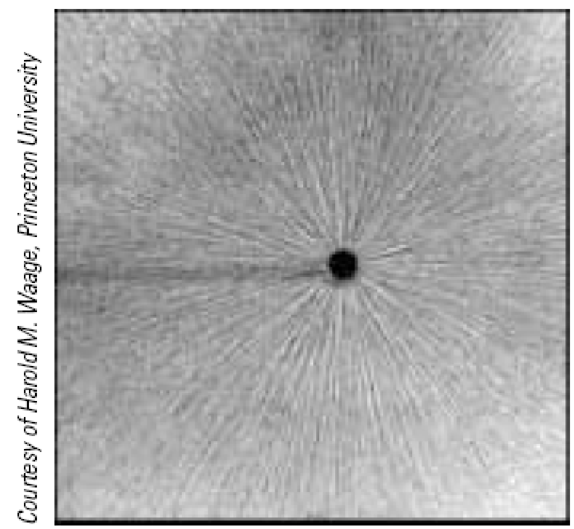


Imagen de partículas pequeñas suspendidas en aceite, alrededor de una punta conductora cargada.

Líneas de campo eléctrico.

Las reglas para construir las líneas de campo (considerando que la tangente a una línea de campo en cualquier punto es la dirección del campo eléctrico en ese punto, y que el número de líneas por unidad de área transversal es proporcional a la magnitud del campo eléctrico) son las siguientes:

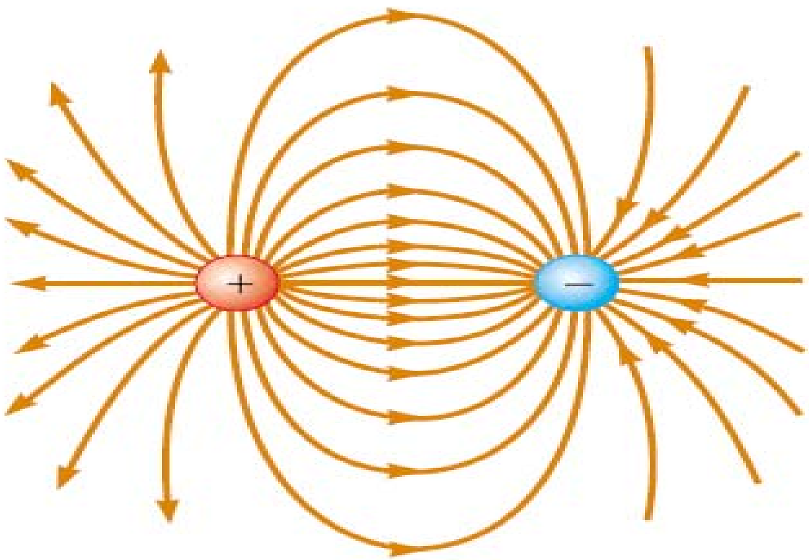
1. Las líneas deben empezar en cargas positivas y terminar en cargas negativas; en caso de existir un exceso en un tipo de carga, la línea empezará o terminará en infinito (ver el caso de una carga puntual mostrado anteriormente).

2. Las líneas se dibujan de tal forma que a mayor densidad de líneas, mayor intensidad (magnitud) del campo eléctrico.

3. Las líneas NO se cruzan, porque en cada punto el valor del campo es único y un cruce significaría que existen dos valores para el campo total.

Líneas de campo eléctrico.

En el caso de dos cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos (arreglo que recibe el nombre de dipolo eléctrico) podemos trazar las líneas de campo, para obtener



Líneas de campo para un dipolo eléctrico (arreglo formado por dos cargas: positiva y negativa de igual magnitud)

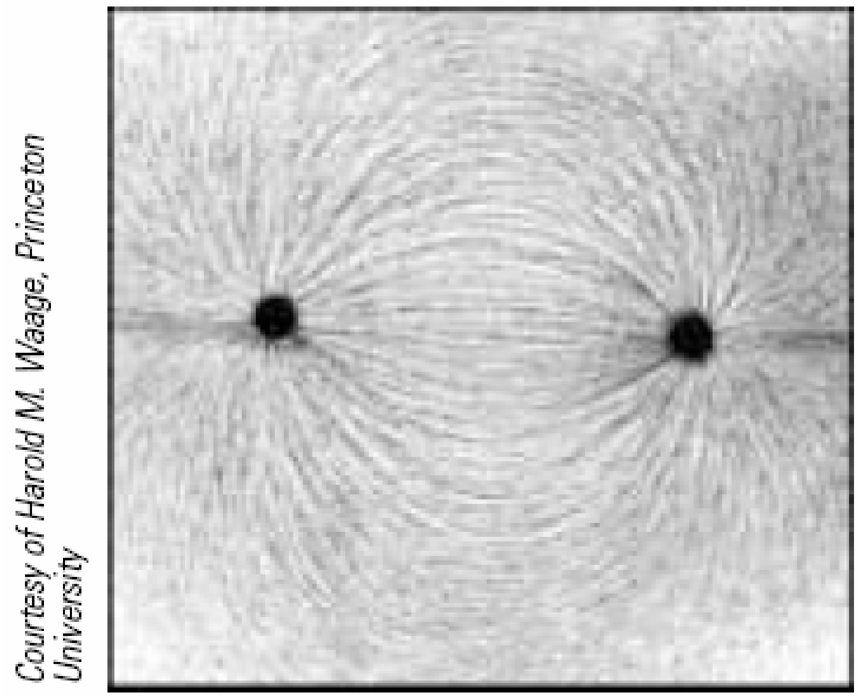
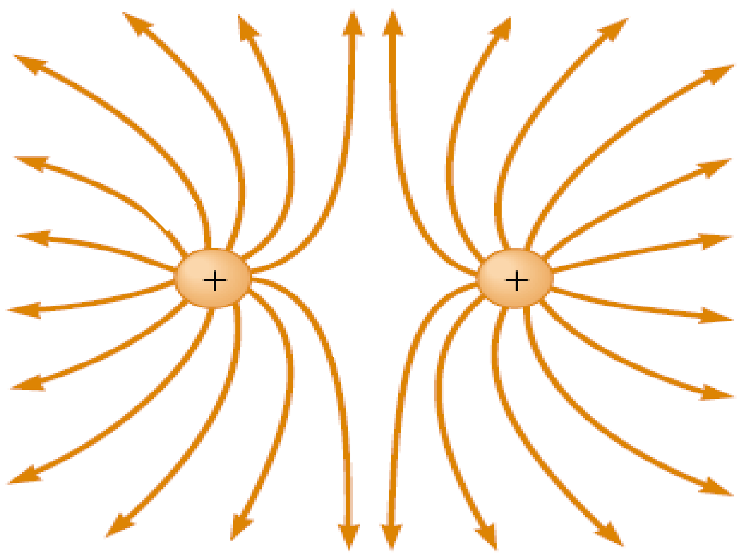


Imagen de partículas pequeñas suspendidas en aceite, alrededor de dos puntas conductoras con cargas opuestas.

Líneas de campo eléctrico.

En el caso de dos cargas puntuales de igual magnitud y signos iguales podemos trazar las líneas de campo, para obtener



Líneas de campo para un arreglo formado por dos cargas positivas de igual magnitud.

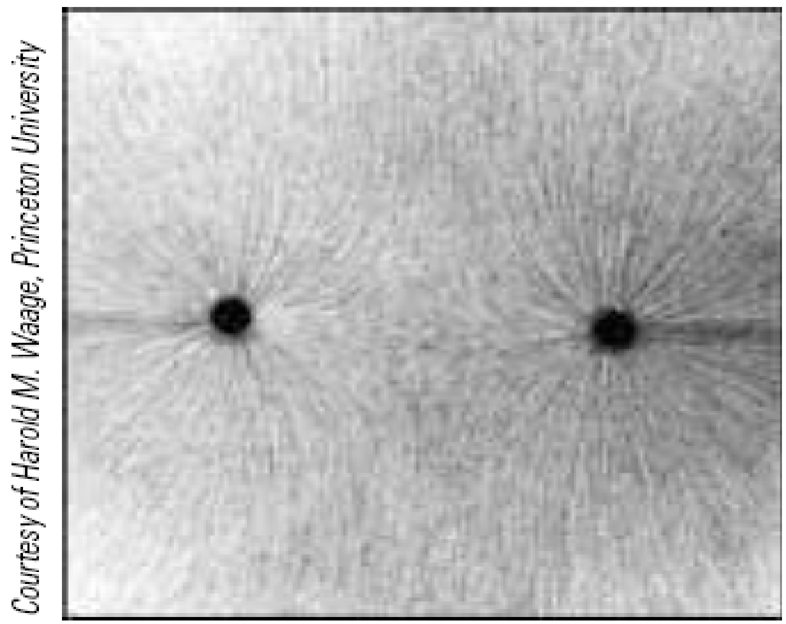
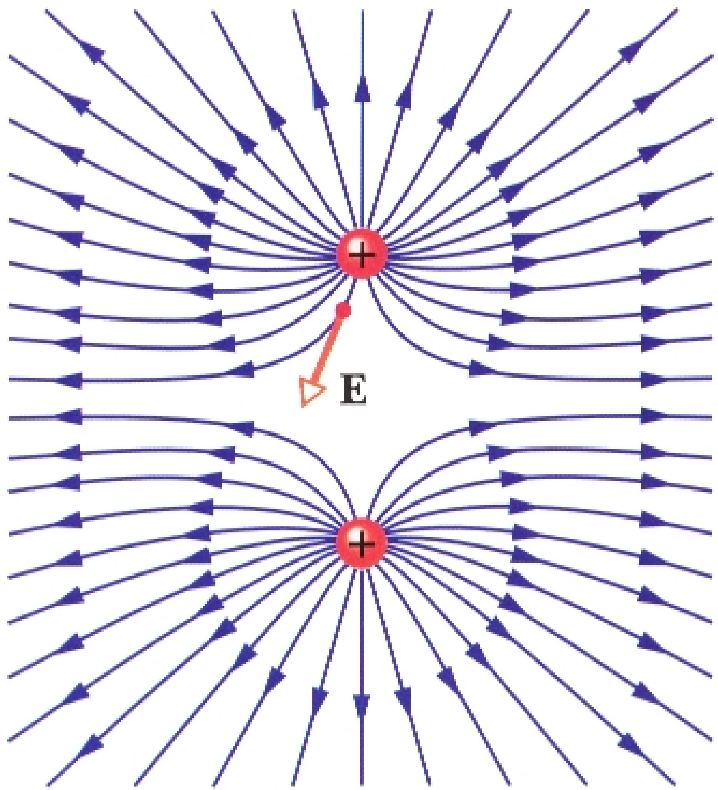


Imagen de partículas pequeñas suspendidas en aceite, alrededor de dos puntas conductoras con cargas opuestas.

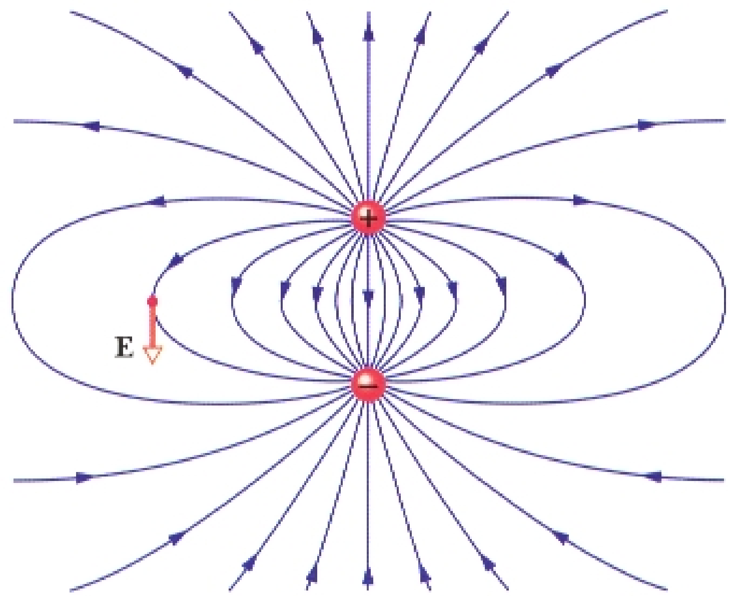
Si las cargas son negativas, el esquema de líneas de campo es idéntico al mostrado aquí (para cargas positivas).

Líneas de campo eléctrico.

Resumiendo, para dos cargas puntuales las líneas de campo eléctrico tenemos



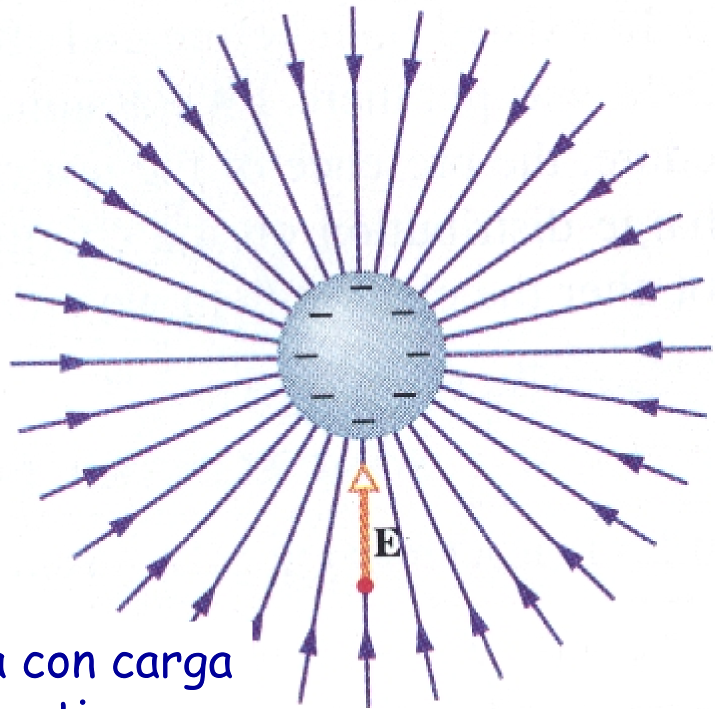
Líneas de campo para dos cargas positivas



Líneas de campo para un dipolo eléctrico

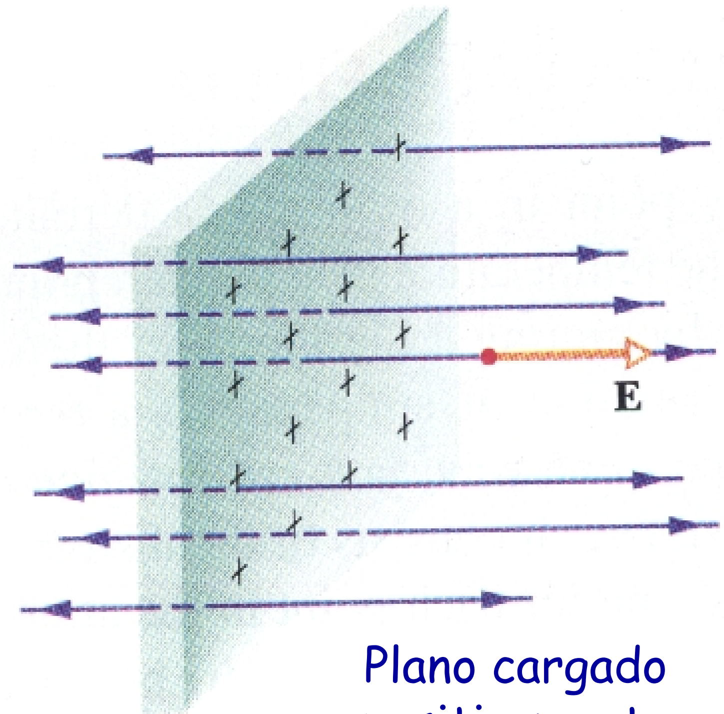
Líneas de campo eléctrico.

De igual manera, podemos dibujar las líneas de campo en tres dimensiones:



Esfera con carga negativa

Simetría esférica

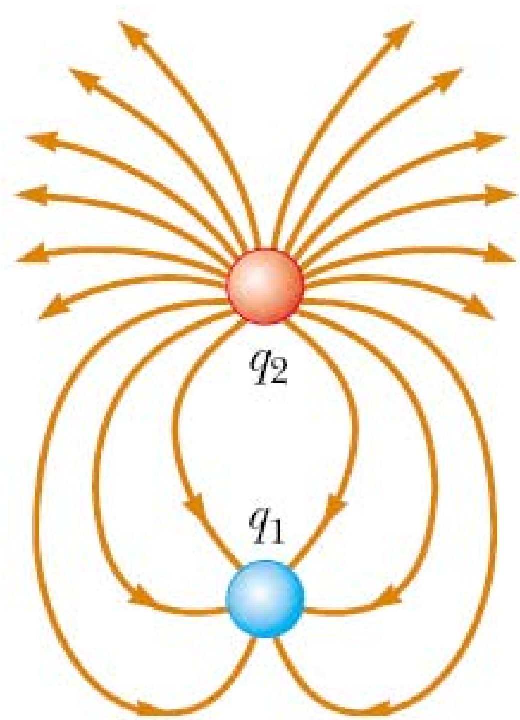


Plano cargado positivamente

Simetría plana

Líneas de campo eléctrico. Un ejercicio.

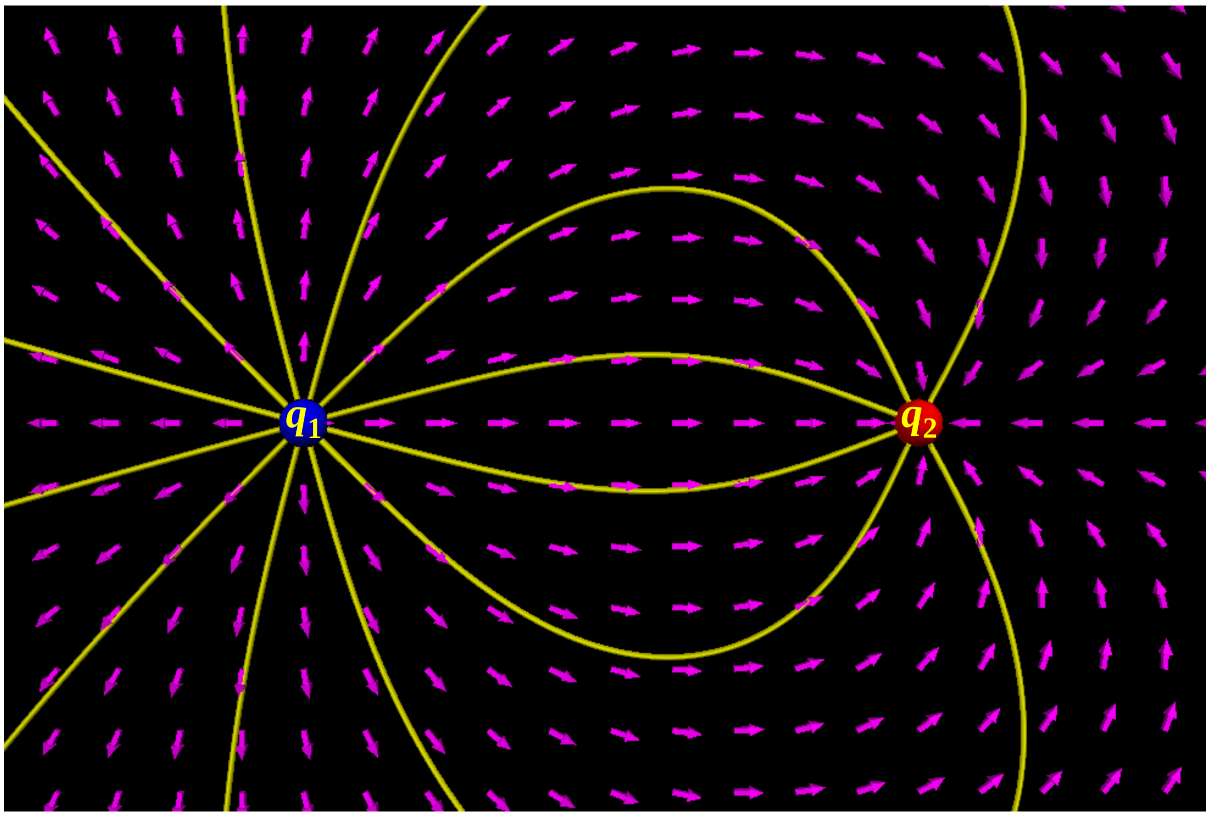
La figura muestra las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales separadas por una distancia pequeña. (a) Determine la razón q_1/q_2. (b) ¿Cuáles son los signos de q_1 y q_2?



- Acorde al hecho de que el número de líneas es proporcional a la intensidad del campo eléctrico, podemos inferir que $q_1/q_2=-6/18=-1/3$ ya que entran 6 líneas a q_1 y salen 18 líneas de q_2.
- Tomando en cuenta que las líneas inician en cargas positivas y terminan en cargas negativas, establecemos que q_1 es negativa y q_2 es positiva.

Líneas de campo eléctrico. Otro ejercicio.

La figura muestra las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales separadas por una distancia pequeña. (a) Determine la razón q_1/q_2. (b) ¿Cuáles son los signos de q_1 y q_2?



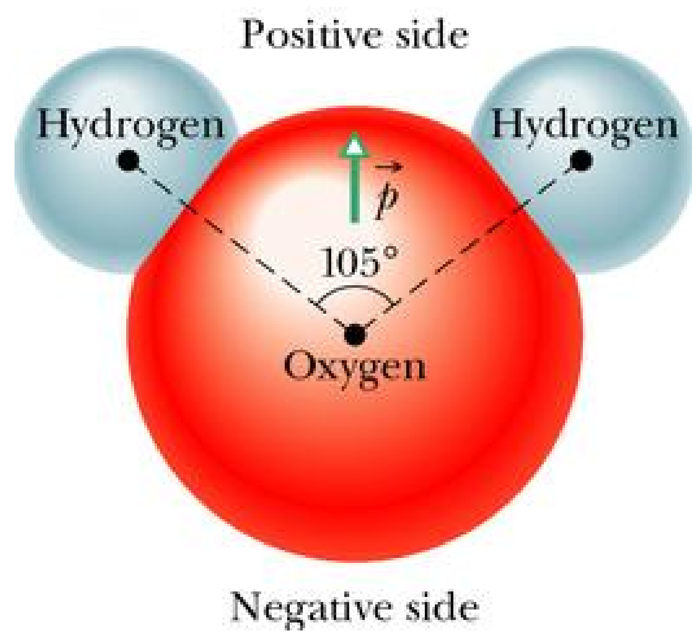
- $q_1/q_2=-2$ ya que salen 12 líneas de q_1 y llegan 6 líneas a q_2.
- q_1 es positiva y q_2 es negativa.

Dipolos eléctricos.

Hay muchas razones por las cuales estudiamos el dipolo eléctrico.

Una de las mas importantes es que muchas cosas en la naturaleza se comportan como dipolos eléctricos.

En particular, en muchas moléculas la carga no está distribuida de manera uniforme. Por ejemplo, para el caso de la molécula de agua aunque la molécula total es neutra, su estructura tiene las características de un dipolo eléctrico.

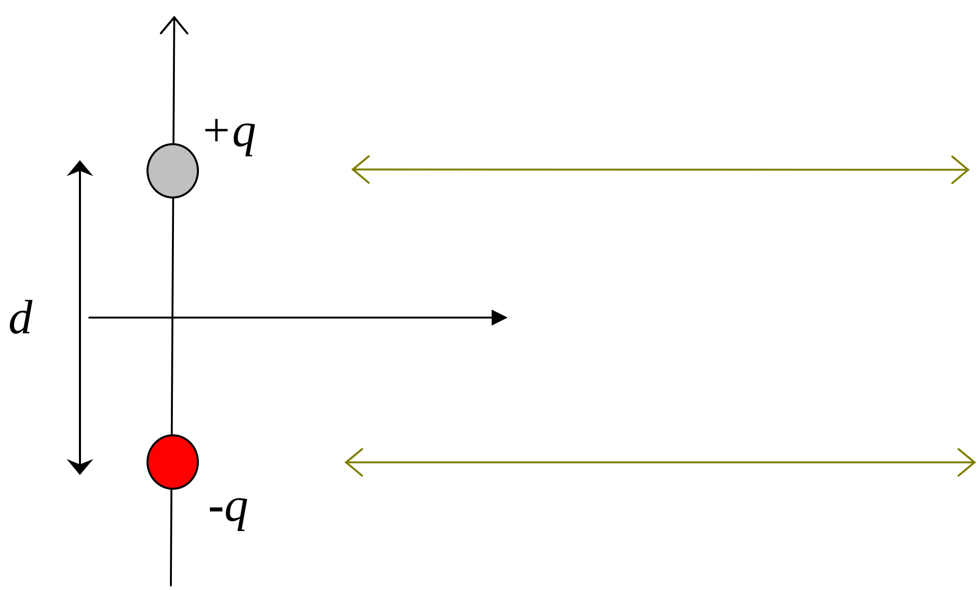


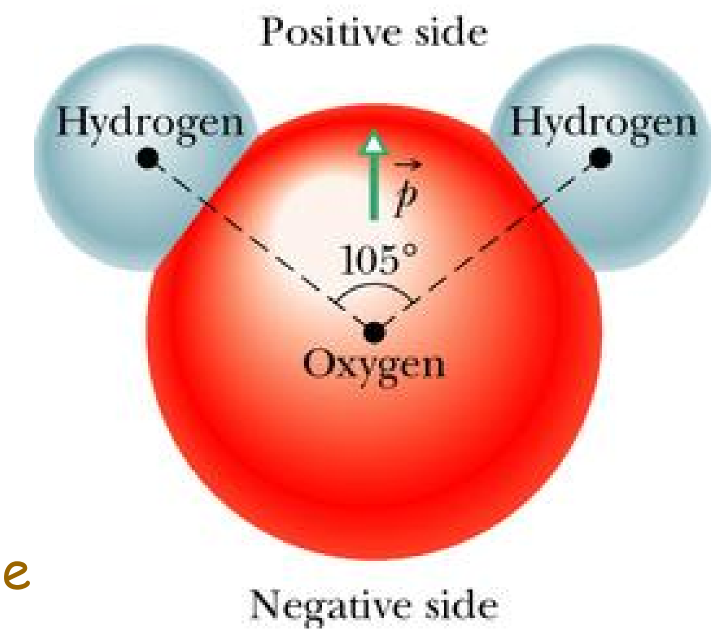
Molécula de agua (H_2O)

Muchas de las propiedades eléctricas de varias moléculas están dominadas por esta estructura dipolar.

Dipolos eléctricos.

Se define un dipolo eléctrico como un arreglo formado por dos cargas de igual magnitud y signos opuestos, separadas una distancia d, tal como se muestra





¡¡La molécula de agua se puede representar mediante el esquema de un dipolo eléctrico!!

Molécula de agua (H_2O)

Dipolos eléctricos. Cálculo del campo *E*.

Para calcular el campo eléctrico de un dipolo, vamos a considerar el dipolo mostrado en la figura P23.22. Para un punto P sobre la línea en que se ubican las cargas (el eje x), se puede mostrar que E está dado por

$$\vec{E} = \frac{k_e q(4ax)}{\left(x^2 - a^2\right)^2}(\hat{i})$$

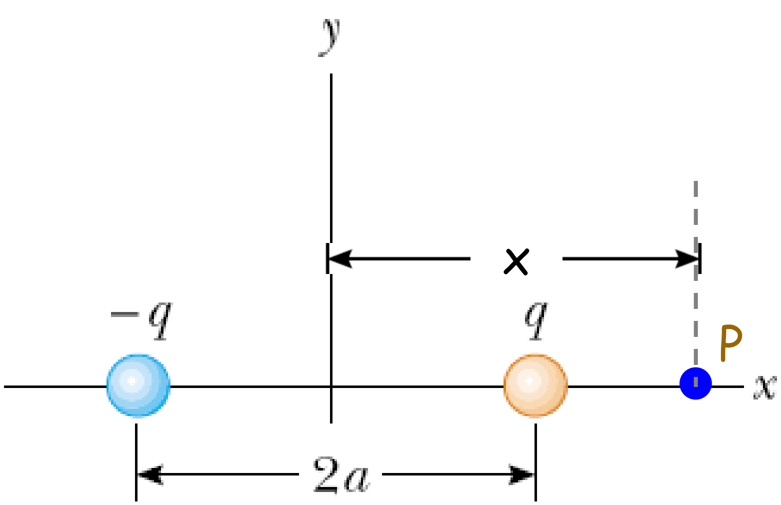


Figure P23.22

Para puntos lejos del dipolo, o sea, x>>a, podemos hacer un desarrollo en serie del denominador y aproximar a primer orden.

De tal forma que el campo de un dipolo medido a grandes distancias está dado por

$$\vec{E} = \frac{k_e q(4a)}{x^3}(\hat{i})$$

Dipolos eléctricos. Momento dipolar.

En este punto es importante definir el momento dipolar eléctrico $\boldsymbol{p}$ como un vector con magnitud dada por el producto de la carga q del dipolo por la separación entre las cargas, es decir

$$p = 2aq$$

y que va de la carga negativa a la carga positiva, sobre la línea que las une. Las unidades de $\boldsymbol{p}$ son carga por distancia, es decir $C{\cdot}m$.

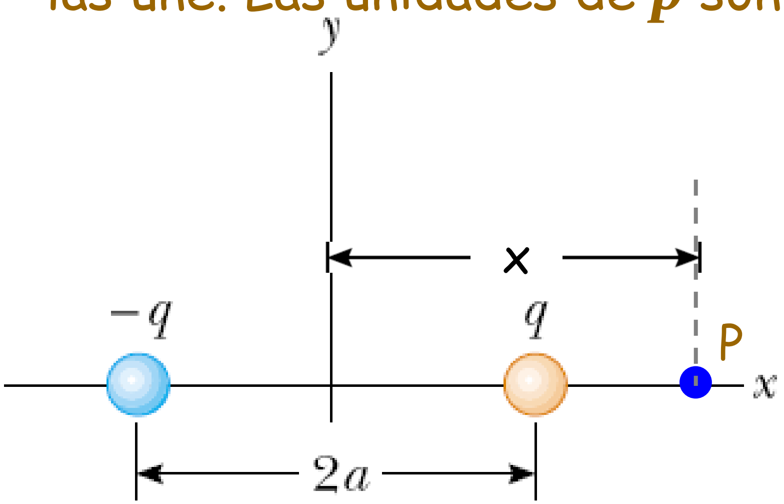


Figure P23.22

Con esta definición, es posible escribir finalmente el campo eléctrico de un dipolo en un punto sobre su eje, como

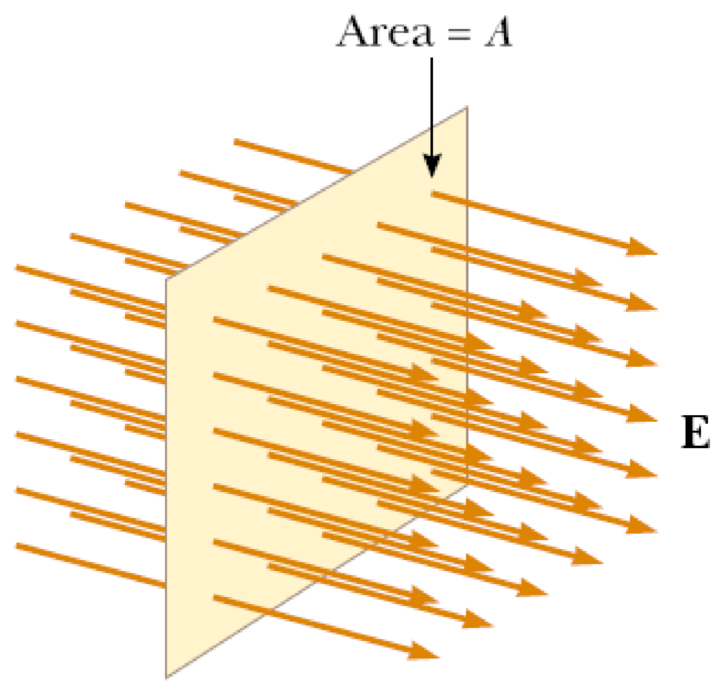
$$\boxed{\vec{E} = 2\frac{k_e \vec{p}}{x^3}}$$

Carga y flujo eléctrico.

El flujo Φ es una propiedad de cualquier campo vectorial.

Resulta conveniente considerar el flujo de un campo vectorial determinado, como si fuese una medida del flujo o intensidad de penetración de los vectores de campo a través de una superficie fija imaginaria en el campo.

Karl Friederich Gauss expreso el concepto de líneas de campo, previamente introducido por Michael Faraday, en forma cuantitativa e introdujo una cantidad llamada ***flujo*** para elaborar la imagen de las líneas que "fluyen" a través de una superficie cerrada.



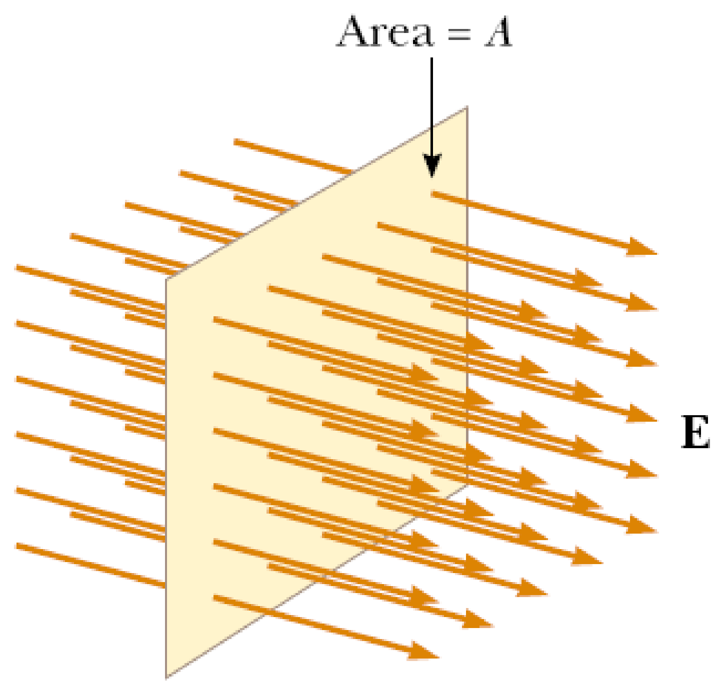
Carga y flujo eléctrico.

Considera un campo eléctrico uniforme en magnitud y dirección, tal como se muestra en la figura, donde las líneas de campo penetran perpendicularmente a un rectángulo de área A.

Recordando que la densidad, o número de líneas, en una región es proporcional al campo $\boldsymbol{E}$ en dicha región, podemos establecer que el número de líneas que penetran la región de área A es proporcional al producto

$$\boxed{\Phi_E = EA}$$

donde Φ_E recibe el nombre de flujo eléctrico.



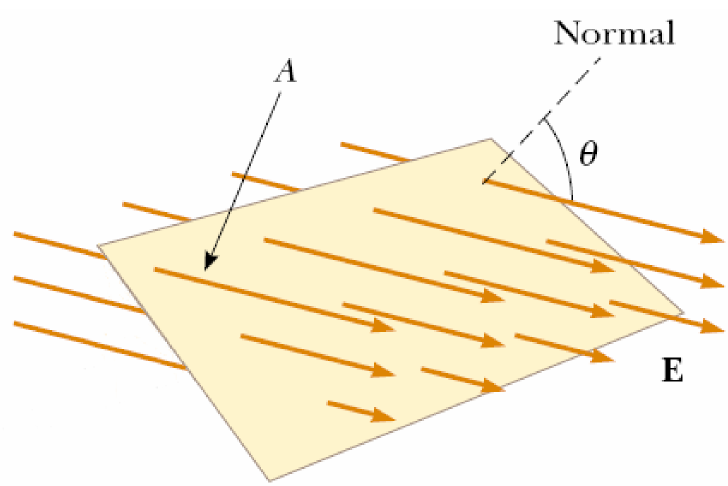
Carga y flujo eléctrico.

Con base en lo anterior, podemos decir que el flujo eléctrico Φ_E, dado por

$$\boxed{\Phi_E = EA}$$

tiene unidades de Campo eléctrico por Área, así que en el SI su unidad es $N \cdot m^2/C$.

Un problema que se nos presenta con la expresión anterior surge cuando consideramos un campo eléctrico en el cual las líneas de campo NO son perpendiculares a la superficie de interés para el cálculo del flujo, tal como se muestra en el esquema.

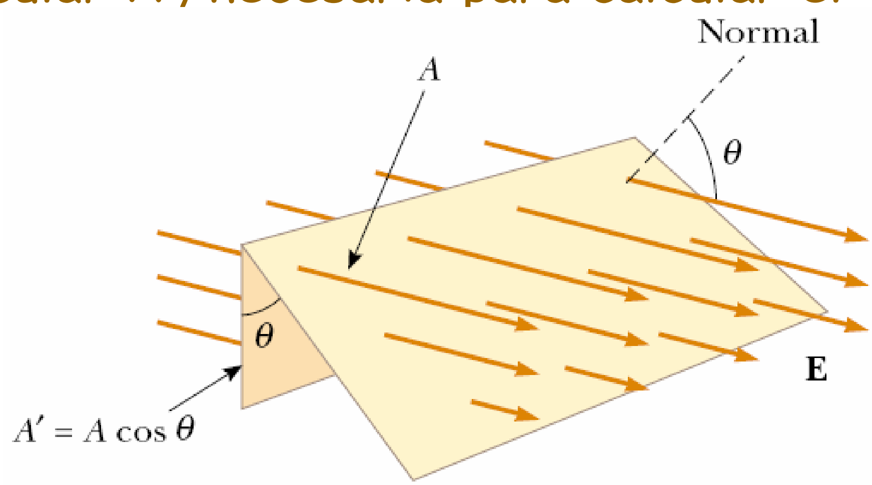


Carga y flujo eléctrico.

En una situación como la mostrada, para poder aplicar la expresión de flujo eléctrico mencionada anteriormente, debemos considerar el área perpendicular a que equivale nuestra área de interes.

Si consideramos que nuestra área de interés es A, vemos que si esta forma un ángulo θ con el campo, entonces usando trigonometría podemos ver que el área perpendicular A', necesaria para calcular el flujo está dada por

$$\boxed{A' = ACos\theta}$$



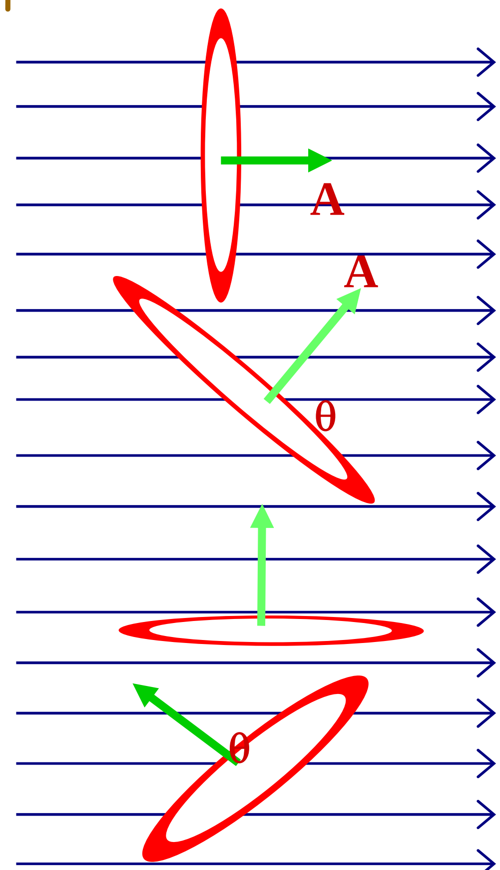
Con lo que encontramos que la expresión general para calcular el flujo eléctrico es

$$\boxed{\Phi_E = EACos\theta}$$

Carga y flujo eléctrico.

De la expresión anterior podemos concluir que, para un área dada A y una intensidad de campo constante E, el flujo puede ser

- <u>máximo</u> si la superficie es perpendicular al campo eléctrico, lo que implica que $\theta = 0^0$ y entonces $EACos\theta = EA$;
- <u>positivo</u> si el ángulo θ se ubica entre 0^0 y 90^0;
- <u>nulo</u> si la superficie es paralela al campo eléctrico, lo que implica que el ángulo $\theta = 90^0$ y entonces $EACos\theta = 0$;
- o <u>negativo</u> si el ángulo θ se ubica entre 90^0 y 180^0.

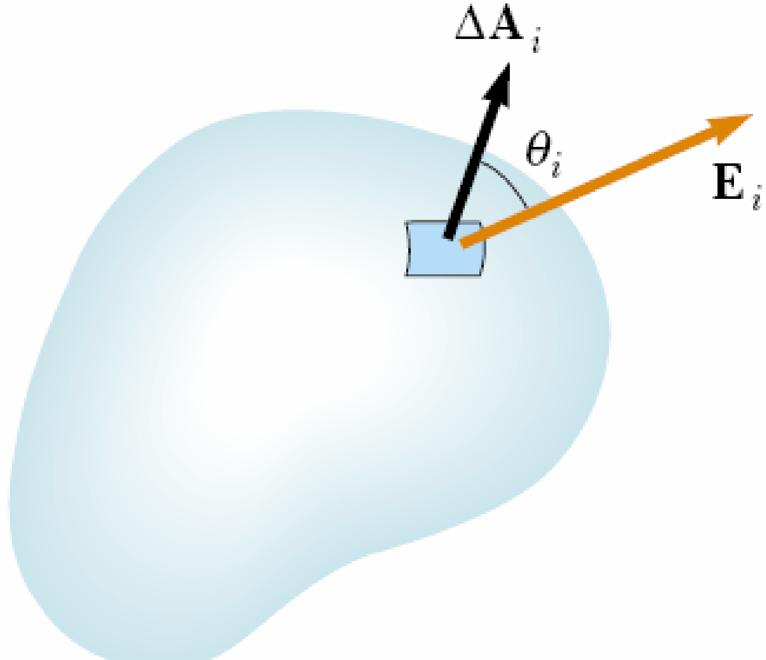


Carga y flujo eléctrico.

Hasta este punto hemos asumido un campo eléctrico uniforme, así como un área plana, en una situación más general el campo puede variar al considerar una superficie más compleja. La pregunta es ¿cómo generalizamos nuestra discusión acerca de flujo eléctrico?

Con base en el esquema anexo, la respuesta se puede construir de la siguiente manera:

Consideremos a la superficie divididada en un gran número de elementos, cada uno de área $\Delta\mathbf{A}_i$, lo suficientemente pequeño para que la variación del campo en tal elemento se pueda despreciar; esto para que podamos tomar el campo como constante en dicho elemento.



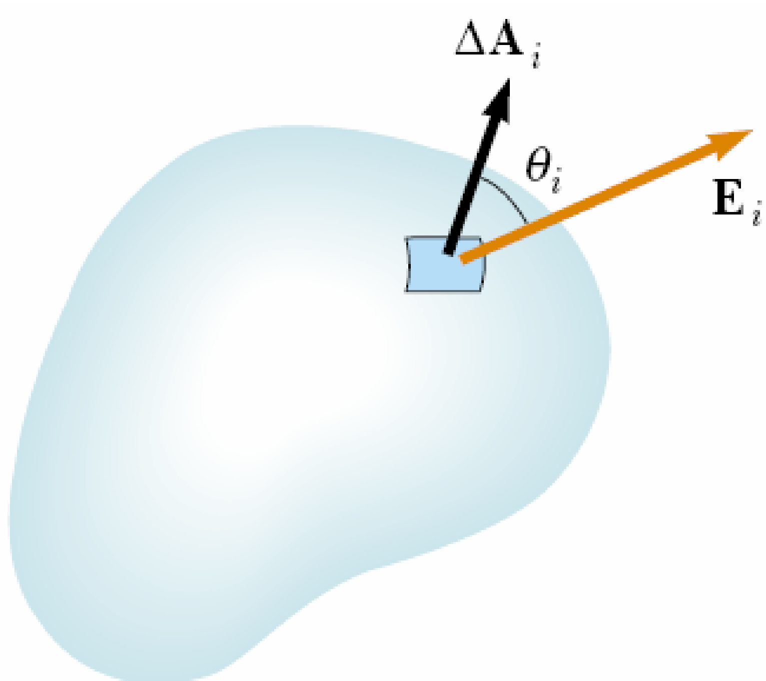
Carga y flujo eléctrico.

Es conveniente definir al vector $\Delta \mathbf{A}_i$ cuya magnitud representa el área del i-ésimo elemento de la superficie y cuya dirección se define perpendicular al área y "saliendo" de ella, tal como se muestra.

El campo eléctrico $\mathbf{E}_i$ forma un ángulo θ_i con el vector $\Delta \mathbf{A}_i$, con lo que el flujo a través del elemento está dado por

$$\Delta \Phi_E = E_i \Delta A_i Cos\theta_i = \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

donde se ha usado la definición del producto escalar.



Carga y flujo eléctrico.

Si a continuación sumamos todas las contribuciones $\Delta\Phi_E$ obtenemos el flujo eléctrico total a través de la superficie:

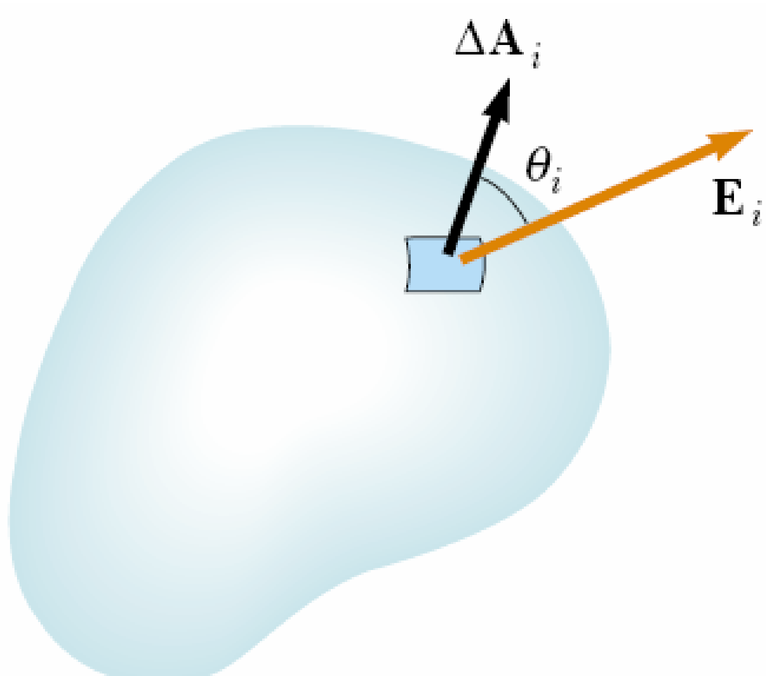
$$\Phi_E = \sum \Delta\Phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

La sumatoria puede sustituirse por una integral si consideramos el límite en el que el area de los elementos se hace tender a cero, a saber

$$\lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i \to \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Por lo que

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$



Carga y flujo eléctrico.

La integral

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S ECos\theta dA$$

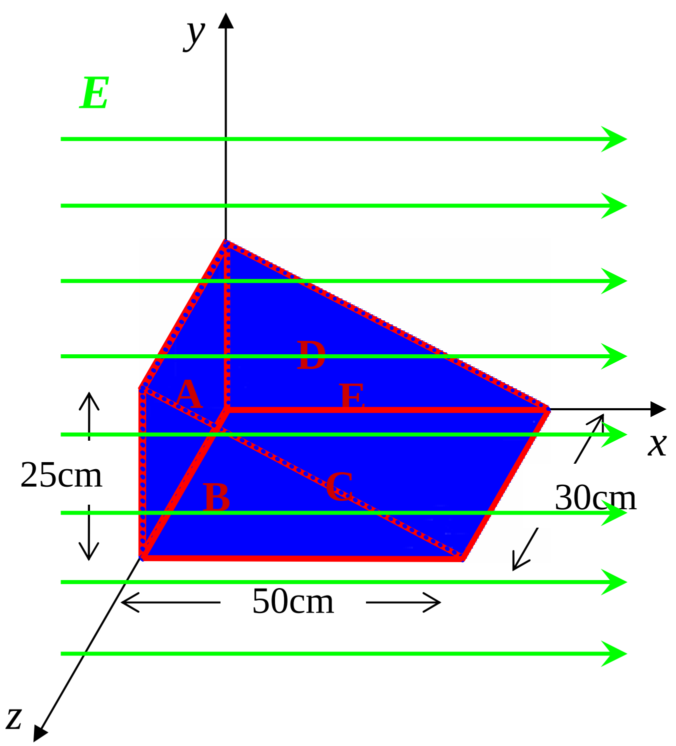
define el flujo eléctrico a través de la superficie S.

Esta definición representa una integral de superficie, lo que significa que debe ser evaluada sobre la superficie en cuestión.

Su valor depende del patrón que presente el campo, así como de la forma que tenga la superficie donde se está calculando el flujo eléctrico.

Carga y flujo eléctrico. Un ejemplo.

Considere una superficie en forma de cuña, inmersa en un campo eléctrico uniforme E=200N/C en dirección +x, tal como se muestra en la figura. Calcule el flujo eléctrico en cada una de las superficies, así como el flujo total.



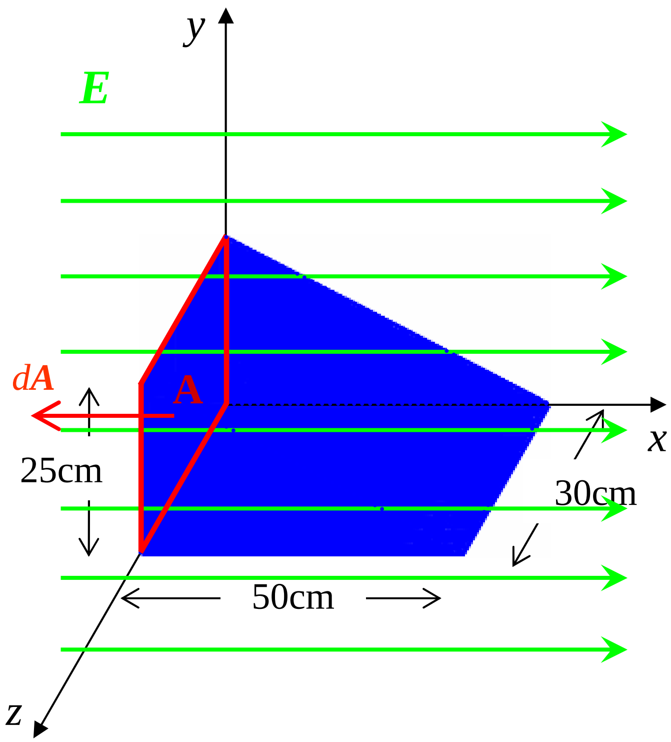
Para calcular el flujo en la superficie mostrada, separémosla en cada una de las caras que la conforman,

A saber:

- Cara A: Réctángulo vertical
- Cara B: Triángulo vertical
- Cara C: Rectángulo horizontal
- Cara D: Triángulo vertical
- Cara E: Rectángulo inclinado.

Carga y flujo eléctrico. Un ejemplo.

Considere una superficie en forma de cuña, inmersa en un campo eléctrico uniforme E=200N/C en dirección +x, tal como se muestra en la figura. Calcule el flujo eléctrico en cada una de las superficies, así como el flujo total.



Cara A: Réctángulo vertical.

En este caso el flujo eléctrico

$$\Phi_{E_A} = \int_A ECos\theta dA$$

resulta ser

$$\Phi_{E_A} = ECos180^0 \int_A dA$$

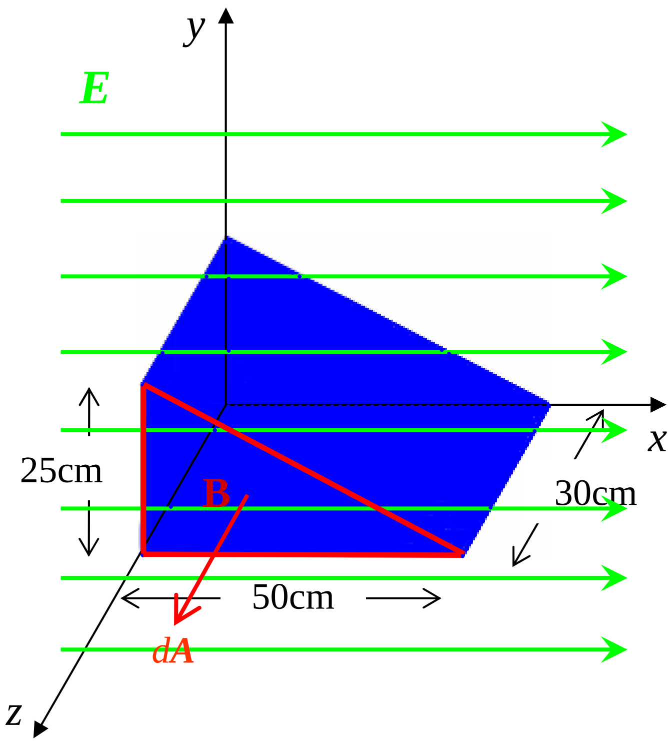
$$\Phi_{E_A} = \left(200\, {}^{N}\!/_{C}\right)(-1)(0.30m)(0.25m)$$

de donde

$$\boxed{\Phi_{E_A} = -15\, {}^{N\cdot m^2}\!/_{C}}$$

Carga y flujo eléctrico. Un ejemplo.

Considere una superficie en forma de cuña, inmersa en un campo eléctrico uniforme E=200N/C en dirección +x, tal como se muestra en la figura. Calcule el flujo eléctrico en cada una de las superficies, así como el flujo total.



Cara B: Triángulo vertical

En este caso el flujo eléctrico

$$\Phi_{E_B} = \int_B E\,Cos\theta\, dA$$

resulta ser

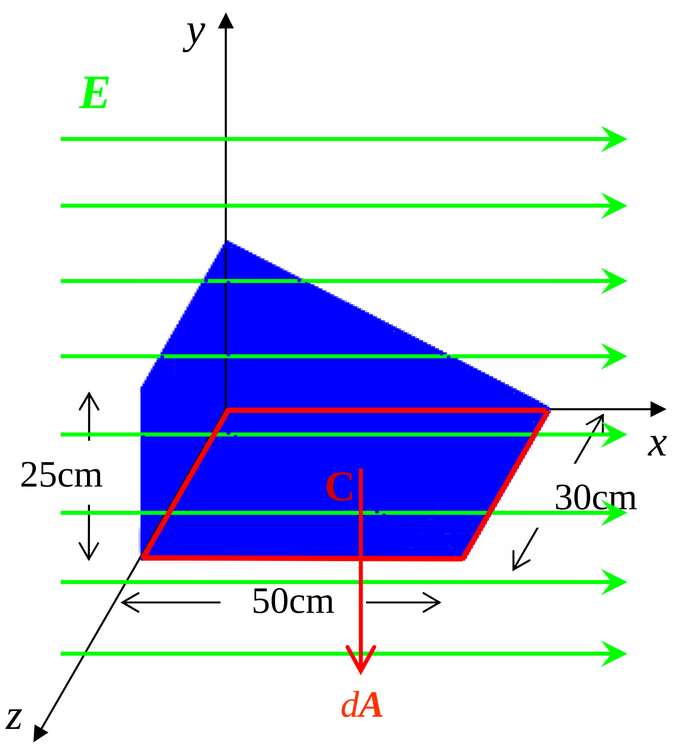
$$\Phi_{E_B} = E\,Cos90^0 \int_B dA$$

de donde

$$\boxed{\Phi_{E_B} = 0}$$

Carga y flujo eléctrico. Un ejemplo.

Considere una superficie en forma de cuña, inmersa en un campo eléctrico uniforme E=200N/C en dirección +x, tal como se muestra en la figura. Calcule el flujo eléctrico en cada una de las superficies, así como el flujo total.



Cara C: Rectángulo horizontal

En este caso el flujo eléctrico

$$\Phi_{E_C} = \int_C E Cos\theta dA$$

resulta ser

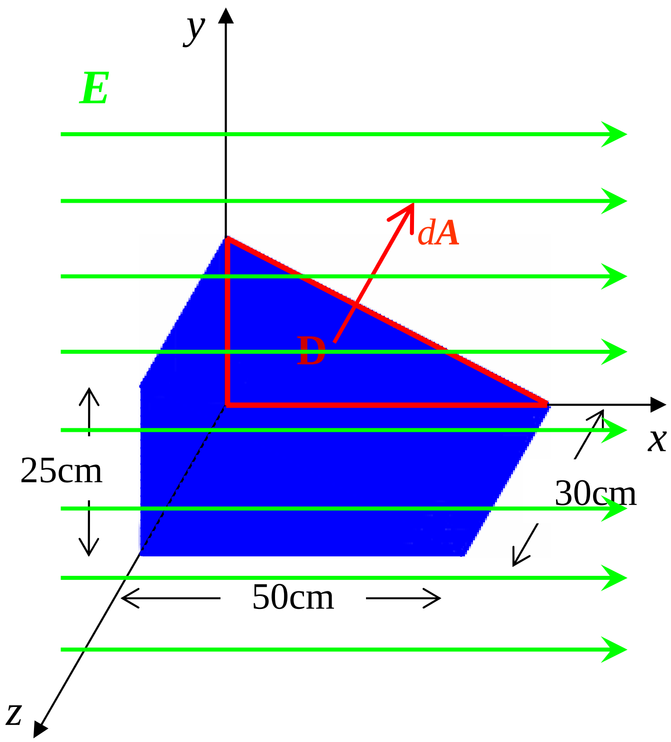
$$\Phi_{E_C} = E Cos 90^0 \int_C dA$$

de donde

$$\boxed{\Phi_{E_C} = 0}$$

Carga y flujo eléctrico. Un ejemplo.

Considere una superficie en forma de cuña, inmersa en un campo eléctrico uniforme E=200N/C en dirección +x, tal como se muestra en la figura. Calcule el flujo eléctrico en cada una de las superficies, así como el flujo total.



Cara D: Triángulo vertical

En este caso el flujo eléctrico

$$\Phi_{E_D} = \int_D E Cos\theta dA$$

resulta ser

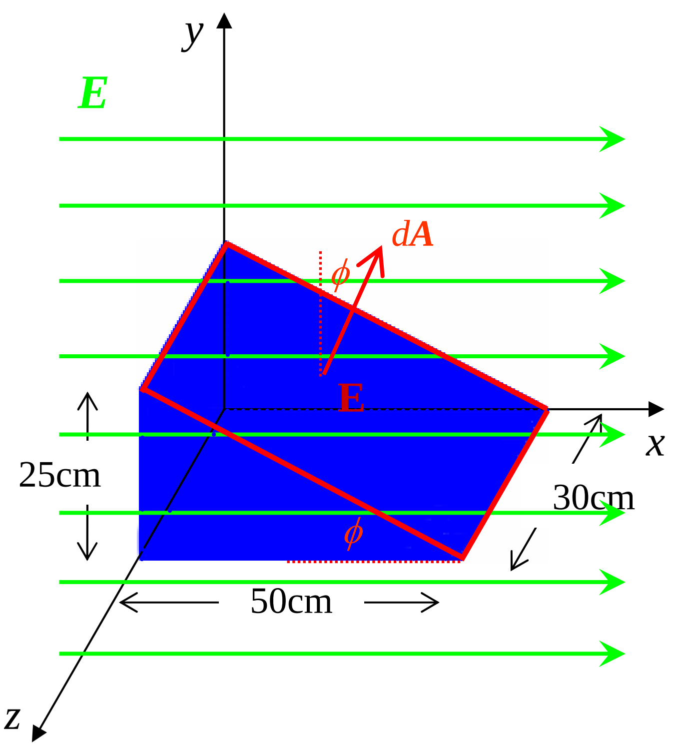
$$\Phi_{E_D} = E Cos 90^0 \int_C dA$$

de donde

$$\boxed{\Phi_{E_D} = 0}$$

Carga y flujo eléctrico. Un ejemplo.

Considere una superficie en forma de cuña, inmersa en un campo eléctrico uniforme E=200N/C en dirección +x, tal como se muestra en la figura. Calcule el flujo eléctrico en cada una de las superficies, así como el flujo total.



Cara E: Rectángulo inclinado.

En este caso el flujo eléctrico

$$\Phi_{E_E} = \int_E ECos\theta dA$$

resulta ser

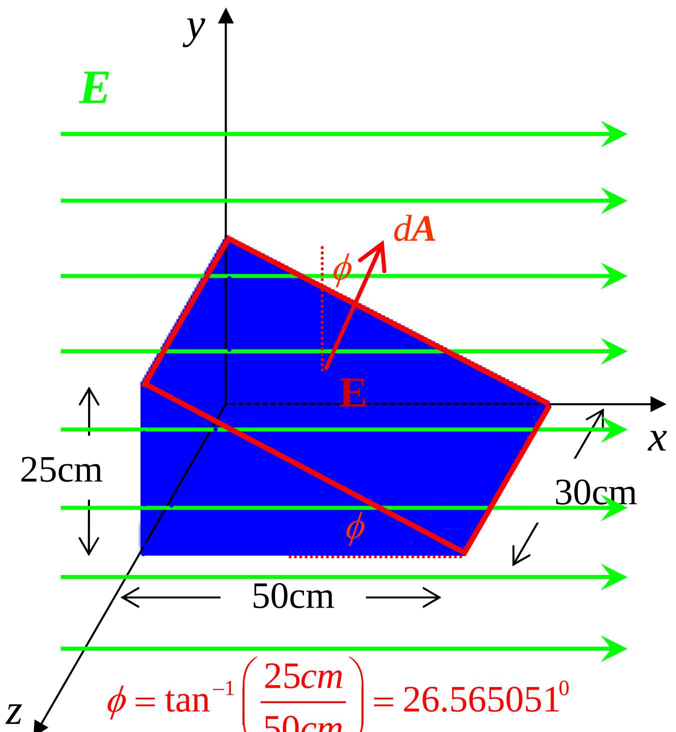
$$\Phi_{E_E} = ECos\left(90^0 - \phi\right)\int_E dA$$

El ángulo ϕ se obtiene del esquema, resultando ser

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{25cm}{50cm}\right) = 26.565051^0$$

Carga y flujo eléctrico. Un ejemplo.

Considere una superficie en forma de cuña, inmersa en un campo eléctrico uniforme E=200N/C en dirección +x, tal como se muestra en la figura. Calcule el flujo eléctrico en cada una de las superficies, así como el flujo total.



$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{25cm}{50cm}\right) = 26.565051^0$$

Por otro lado, para calcular el área advertimos que el largo del rectángulo corresponde a la hipotenusa del triángulo lateral, de donde

$$L = \sqrt{(25cm)^2 + (50cm)^2} = 55.901699cm$$

Así que

$$\Phi_{E_E} = \left(200\, {}^{N}\!/\!{}_{C}\right)\left(Cos\left(90^0 - 26.5651^0\right)\right) \times (0.30m)(0.559017m)$$

de donde

$$\boxed{\Phi_{E_E} = 15\, {}^{N \cdot m^2}\!/\!{}_{C}}$$

Carga y flujo eléctrico. Un ejemplo.

Considere una superficie en forma de cuña, inmersa en un campo eléctrico uniforme E=200N/C en dirección +x, tal como se muestra en la figura. Calcule el flujo eléctrico en cada una de las superficies, así como el flujo total.

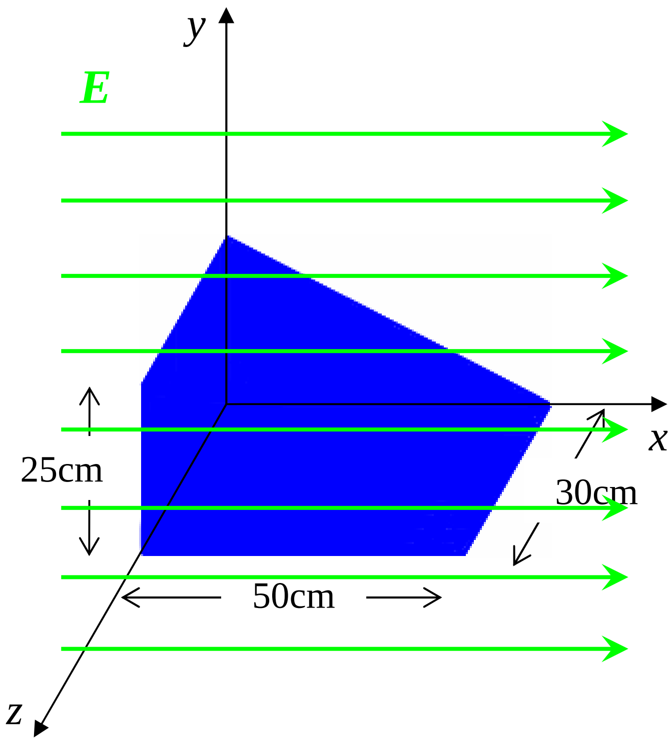
Con lo anterior, los diferentes flujos son

$$\boxed{\Phi_{E_A} = -15\, N\cdot m^2/C}$$

$$\boxed{\Phi_{E_B} = \Phi_{E_C} = \Phi_{E_D} = 0}$$

$$\boxed{\Phi_{E_E} = 15\, N\cdot m^2/C}$$

de donde el flujo total, resultado de la suma de todos los flujos, es cero.



Electricidad y calor

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

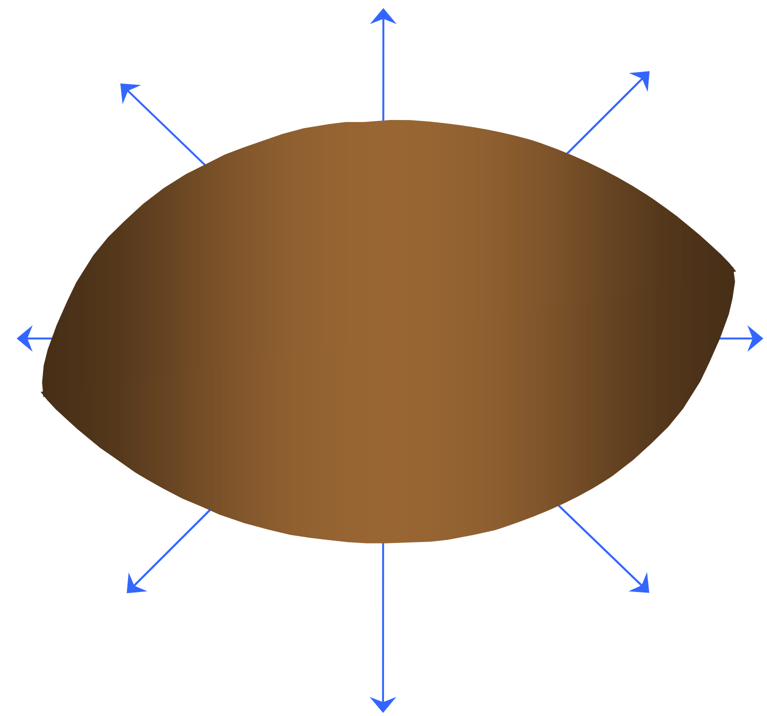
Webpage: http://paginas.fisica.uson.mx/roberto.duarte
http://seri.fisica.uson.mx/roberto.duarte

Carga y flujo eléctrico. Otro ejemplo.

Supongamos que tenemos una carga positiva Q con sus líneas de campo.

Cerramos la carga en diferentes superficies cerradas.

Con base a lo anterior, es posible establecer que el flujo eléctrico total Φ_E, debido al campo $\boldsymbol{E}$ generado por una carga y que atraviesa cualquier superficie cerrada es independiente de la superficie que encierra a la carga.



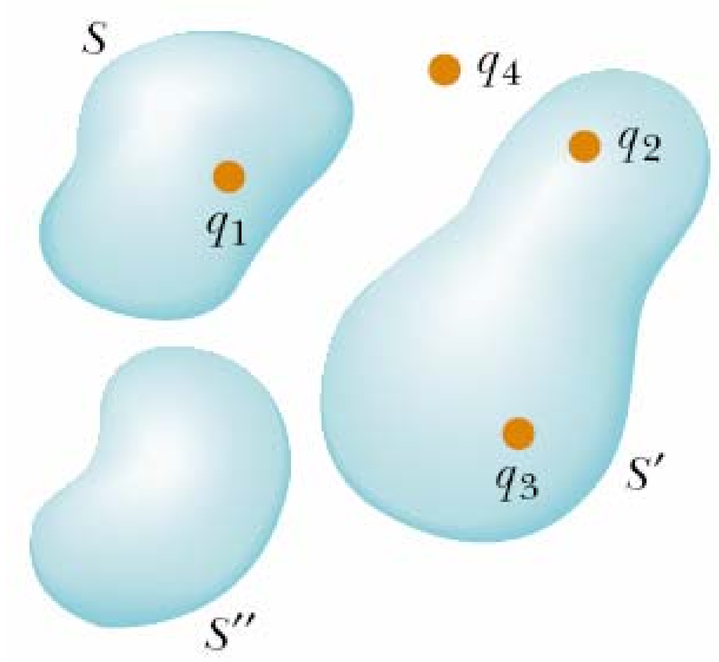
Ahora, el cálculo corresponde a una integral cerrada sobre el área S.

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

Ley de Gauss.

El flujo neto a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada.

Considerando el esquema anexo



El flujo a través de S sólo depende del valor de la carga q_1.
Similarmente, el flujo a través de la superficie S' sólo depende de las cargas encerradas, a saber q_2 y q_3.
En cambio, para la superficie S'' no hay flujo neto, ya que no encierra carga.

Finalmente, la carga q_4, al no estar encerrada por ninguna de las superficies, no contribuye en el cálculo de los flujos totales.

Ley de Gauss.

La ley de Gauss establece una relación general entre el flujo (total) a través de una superficie cerrada y la carga encerrrada por la misma.

Lo anterior proporciona una herramienta para el cálculo del campo eléctrico debido a una carga o a una distribución de carga.

Sin embargo, recordemos que el campo electrostático debido a una distribución continua de carga siempre puede encontrarse usando la ley de Coulomb, aunque el calculo requerido pueda ser complicado.

La ley de Gauss es una afirmación general sobre las propiedades de los campos eléctricos y no esta restringida a los campos electrostáticos, como la ley de Coulomb.

Ley de Gauss.

Cuando una distribución de carga tiene suficiente simetría, la ley de Gauss puede proporcionar un camino elegante para determinar el campo electrostático en unos pocos pasos simples.

Karl Friedrich Gauss
(1777-1855)

La ley de Gauss establece que "el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada encerrando una carga puntual q está dado por q/ε_0 y es independiente de la forma de dicha superficie", es decir

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0}$$

Que puede escribirse como

$$\boxed{\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{encerrada}}}$$

Ley de Gauss. Un ejercicio.

Cuatro superficies cerradas (S_1 a S_4), junto con las cargas -$2Q$, Q y -Q se esquematizan en la figura P24.11. (Las líneas coloreadas representan las intersecciones de las diferentes superficies con el plano del esquema). Encuentra el flujo eléctrico total a través de cada superficie.

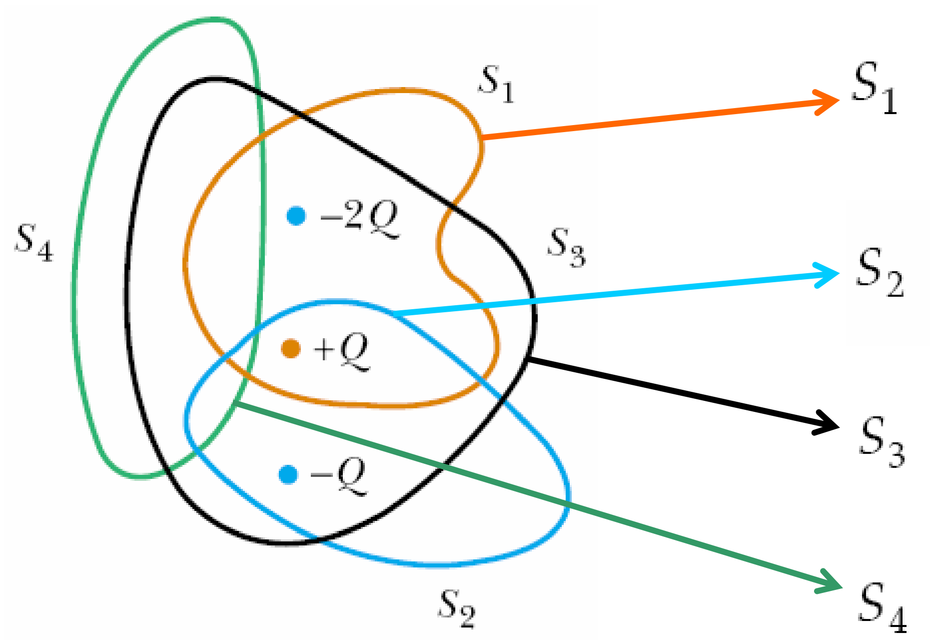


Figure P24.11

$$\Phi_E = \frac{-2Q+Q}{\epsilon_0} = \boxed{-\frac{Q}{\epsilon_0}}$$

$$\Phi_E = \frac{+Q-Q}{\epsilon_0} = \boxed{0}$$

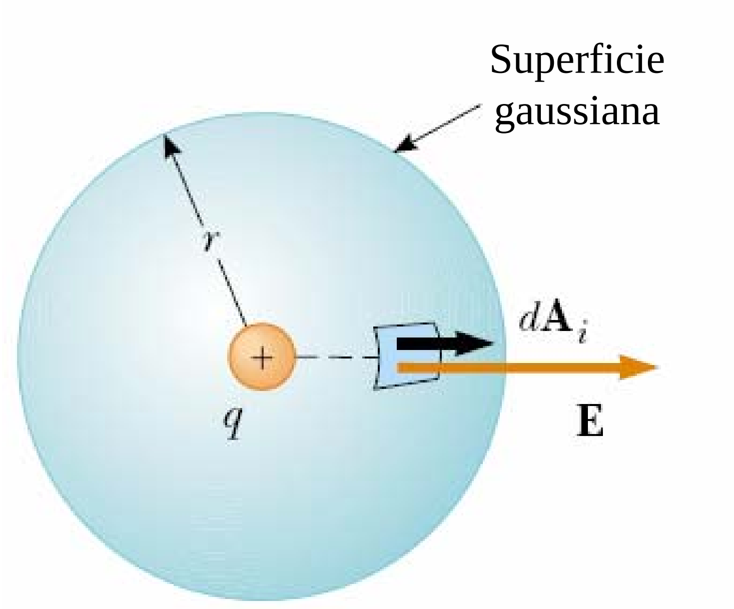
$$\Phi_E = \frac{-2Q+Q-Q}{\epsilon_0} = \boxed{-\frac{2Q}{\epsilon_0}}$$

$$\Phi_E = \boxed{0}$$

Ley de Gauss.

A continuación veamos la equivalencia entre la ley de Gauss y la ley de Coulomb.

Para ello tomemos una carga puntual positiva con carga q.



Consideremos una superficie gaussiana esférica, centrada en la carga q y con un radio r.

Podemos observar que en todos los puntos sobre la superficie gaussiana, tanto el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, como el diferencial de area $d\mathbf{A}_i$ son paralelos, de tal forma que

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \left(k_e \frac{q}{r^2} \right) \cdot (dA)$$

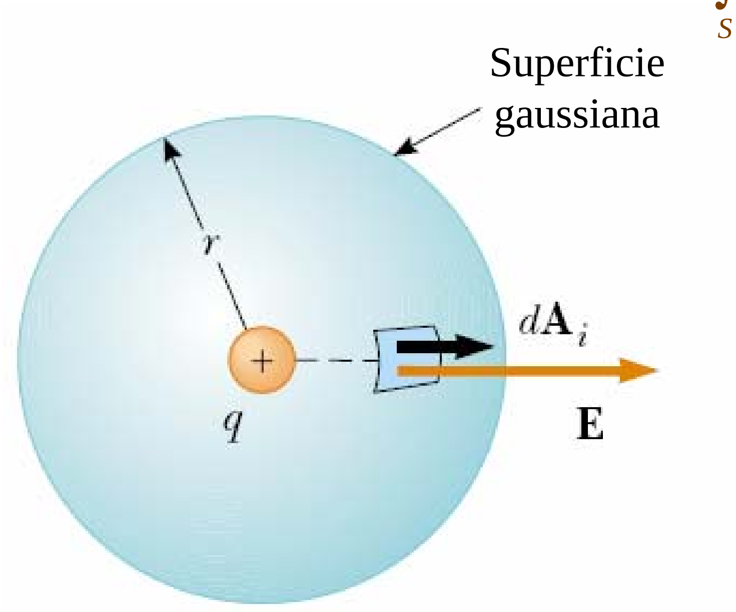
Ley de Gauss.

Para evaluar la integral, vemos que esta se puede escribir como

$$\Phi_E = \left(k_e \frac{q}{r^2} \right) \oint_S (dA)$$

La integral cerrada sobre dA corresponde al área de una esfera de radio r, a saber

$$\oint_S (dA) = 4\pi r^2$$



Con esto el flujo total es

$$\Phi_E = \left(k_e \frac{q}{r^2} \right) \left(4\pi r^2 \right) = 4\pi k_e q$$

que, al considerar que $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0$, podemos escribir como

$$\boxed{\Phi_E = 4\pi \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right) q = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

que corresponde a la ley de Gauss.

Aplicaciones de la ley de Gauss.

Como se mencionó anteriormente, la ley de Gauss es muy útil para calcular el campo eléctrico de una distribución de carga si esta presenta suficiente simetría.

Las simetrías más comunes son

- esférica, que corresponde a cargas puntuales o esféricas. En tal caso, la ley de gauss se escribe como

$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = q_{\text{encerrada}} \Longrightarrow \boxed{E(r) = \frac{q_{\text{encerrada}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

- cilíndrica, que corresponde a distribuciones lineales o cilíndricas (como alambres). En tal caso, la ley de gauss se escribe como

$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 E\left(2\pi r L\right) = q_{\text{encerrada}} \Longrightarrow \boxed{E(r) = \frac{q_{\text{encerrada}}}{2\pi\varepsilon_0 L r}}$$

Aplicaciones de la ley de Gauss.

Para poder aplicar cualquiera de las dos formas anteriores de la ley de Gauss, en la resolución de problemas debemos seguir el siguiente procedimiento:

1. Seleccionar la simetría que corresponda al problema que buscamos resolver: esférica o cilíndrica.
2. Trazar la superficie gaussiana que corresponda, centrada en la carga, de forma que pase por el punto donde necesitemos calcular el campo eléctrico.
3. Calcular la carga encerrada por la superficie gaussiana. En caso de ser necesario, realizar la integración entre los límites adecuados.
4. Sustituir la carga (o la expresión que la proporciona) en la forma de la ley de Gauss que hayamos escogido con base en la simetría, tal como se mencionó en el punto 1.

Aplicaciones de la ley de Gauss.

Para calcular la carga encerrada, en el caso de una distribución continua, se usa:

- para una distribución lineal (en una dimensión):

$$q_{\text{encerrada}} = \int_{\text{línea}} \lambda dl$$

donde λ es la densidad lineal de carga.

- para una distribución superficial (en dos dimensiones):

$$q_{\text{encerrada}} = \int_{\text{área}} \sigma da$$

donde σ es la densidad superficial de carga.

- para una distribución volumétrica (en tres dimensiones)

$$q_{\text{encerrada}} = \int_{\text{volumen}} \rho dV$$

donde ρ es la densidad volumétrica de carga

Aplicaciones de la ley de Gauss.

Cálculos típicos de campos eléctricos usando Ley de Gauss		
Distribución de carga	Campo eléctrico	Ubicación
Esfera aislante de radio R, densidad de carga uniforme y carga total Q.	$k_e \frac{Q}{r^2}$	r>R
	$k_e \frac{Q}{R^3} r$	r<R
Cascarón esférico de radio R y carga total Q	$k_e \frac{Q}{r^2}$	r>R
	0	r<R
Línea muy larga de carga por unidad de longitud, λ.	$2k_e \frac{\lambda}{r}$	Fuera de la línea
Plano muy grande con densidad superficial de carga σ.	$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	Fuera del plano
Conductor con una densidad superficial de carga σ.	$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	Fuera del conductor
	0	Dentro del conductor

Aplicaciones de la ley de Gauss.

Una esfera aislante tiene un diamétro de 8.00cm y contiene una carga de 5.70μC distribuida uniformemente en su volumen interno. Calcule la carga encerrada por una superficie esférica concéntrica con radio (a) r=2.00cm y (b) r=6.00cm. Con estos valores calcule la intensidad del campo eléctrico a una distancia (c) r=2.00cm y (d) r=6.00cm medida desde el centro.

La densidad de carga volumétrica ρ es

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{5.70\times10^{-6}C}{\frac{4}{3}\pi(0.04m)^3} = 2.12621\times10^{-2}\, {}^{C}\!/_{m^3}$$

(a) $q_{\text{encerrada}} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \left(2.12621\times10^{-2}\, {}^{C}\!/_{m^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi(0.02m)^3\right) = 7.125\times10^{-7}C$

(b) $q_{\text{encerrada}} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \left(2.12621\times10^{-2}\, {}^{C}\!/_{m^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi(0.04m)^3\right) = 5.70\times10^{-6}C$

Aplicaciones de la ley de Gauss.

Una esfera aislante tiene un diamétro de 8.00cm y contiene una carga de 5.70μC distribuida uniformemente en su volumen interno. Calcule la carga encerrada por una superficie esférica concéntrica con radio (a) r=2.00cm y (b) r=6.00cm. Con estos valores calcule la intensidad del campo eléctrico a una distancia (c) r=2.00cm y (d) r=6.00cm medida desde el centro.

Para el cálculo de la intensidad del campo, usaremos

$$E(r) = \frac{q_{\text{encerrada}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(c) $$E = \frac{7.125\times10^{-7}\,C}{4\pi\left(8.8542\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2\right)(0.020m)^2} = 1.6009054\times10^{7}\,N/C$$

(d) $$E = \frac{5.70\times10^{-6}\,C}{4\pi\left(8.8542\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2\right)(0.040m)^2} = 3.2018109\times10^{7}\,N/C$$

Aplicaciones de la ley de Gauss.

Una esfera sólida de radio R=40.0cm tiene una carga total positiva de 26.0μC distribuida uniformemente en todo su volumen. Calcula la magnitud del campo eléctrico a (a) 0cm, (b) 10cm, (c) 40cm, y (d) 60cm del centro de la esfera.

Para el cálculo de la intensidad del campo, usaremos

$$E(r) = \frac{q_{\text{encerrada}}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \qquad r < R \qquad\qquad E(r) = \frac{q_{\text{encerrada}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r \geq R$$

(a) $E = 0 \, {}^{N}\!/\!_{C}$

(b) $E = 365,625 \, {}^{N}\!/\!_{C}$

(c) $E = 1.4625 \times 10^6 \, {}^{N}\!/\!_{C}$

(d) $E = 6.5 \times 10^5 \, {}^{N}\!/\!_{C}$

Aplicaciones de la ley de Gauss.

La carga por unidad de longitud, en un filamento recto, es -90μC/m. Encuentra el campo eléctrico a (a) 10cm, (b) 20cm, y (c) 100cm del filamento, donde la distancia se mide perpendicular a la longitud del filamento.

Para el cálculo de la intensidad del campo, usaremos

$$E(r) = \frac{q_{\text{encerrada}}}{2\pi\varepsilon_0 rL} = 2k_e \frac{\lambda}{r} \quad r \geq R$$

(a) $E = 1.62 \times 10^7 \, N/C$

(b) $E = 8.1 \times 10^6 \, N/C$

(c) $E = 1.62 \times 10^6 \, N/C$